Linköpings universitet
Magnus Berggren, MAI

Tentamen i Matematik, fortsättningskurs. NMAA07/TEN1
2025-03-28, kl 8-12.

Inga hjälpmedel är tillåtna. Maclaurinutvecklingar bifogas, se baksidan.
Uppgifterna bedöms med 0 – 3 poäng.
För betyg n (n = 3, 4 eller 5) krävs minst 4(n-1) poäng.

1. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y'+2y=12x$ som uppfyller begynnelsevillkoret $y(0)=1$.

2. Beräkna följande primitiva funktioner

   a) $\int x\sqrt{1+x}\,dx$ (1p) b) $\int \frac{e^x}{1+e^x}dx$ (1p) c) $\int \frac{1}{x^2+3x+2}dx$ (1p)

3) Låt D vara triangeln med hörn i (0,0), (2,0) och (2,2). Beräkna $\iint_D (y-x)\,dx\,dy$

4. (a) Beräkna Maclaurinpolynomet av grad 3 till $e^x-\cos x-\sin x$.
   (b) Bestäm konstanterna a, b och c så att gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x-\sin x+ax^2+bx+c}{x^3}$$

   existerar (ändligt). Bestäm också detta gränsvärde.

5. Beräkna längden av kurvan $y=x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}$, $0\le x\le 3$.

6)

Låt $f(x,y)=ye^{x^2-y^2}$. Bestäm konstanten a så att $f(x,y)$ satisfierar sambandet

$$\frac{1}{x}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial f}{\partial y}=a\frac{f(x,y)}{y^2}$$

7) Bestäm största och minsta värde av $f(x,y)=2x^3-3x^2+3y^2-6y$ på triangelområde D som begränsas av linjerna $x=0$, $y=0$ och $x+y=3$.

1. $y'+2y=12x$ är linjär DE med $f(x)=2$

$IF=e^{2x} \Rightarrow e^{2x}y'+2e^{2x}y=12xe^{2x} \iff$

$(e^{2x}y)'=12xe^{2x} \Rightarrow e^{2x}y=\int 12xe^{2x}dx$ /P.I./

$=12\left(\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{2}\int e^{2x}dx\right)=6xe^{2x}-3e^{2x}+C$

$\Rightarrow y=6x-3+Ce^{-2x}$

$y(0)=1 \Rightarrow 1=-3+C \Rightarrow C=4$

Svar: $y=6x-3+4e^{-2x}$

2. a) $\int x\sqrt{1+x}\,dx \;\Big/\; \begin{array}{l} 1+x=t^2 \\ x=t^2-1 \\ dx=2t\,dt \end{array} \Big/ = \int (t^2-1)\cdot t\cdot 2t\,dt$

$=2\int(t^4-t^2)\,dt=\frac{2}{5}t^5-\frac{2}{3}t^3+C$

Svar: $\frac{2}{5}(1+x)^{5/2}-\frac{2}{3}(1+x)^{3/2}+C$

b) $\int \frac{e^x}{1+e^x}dx \;\Big/\; \begin{array}{l} t=e^x+1 \\ dt=e^x dx \end{array} \Big/ = \int\frac{dt}{t}=\ln(e^x+1)+C$

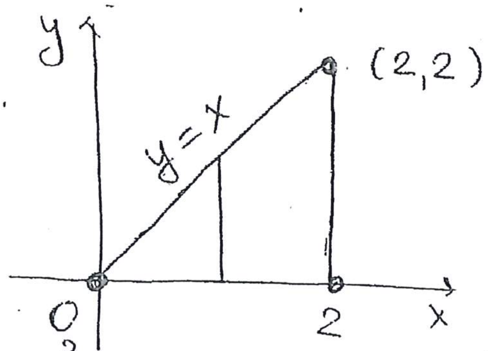
Svar: $\ln(e^x+1)+C$

c) $\int\frac{dx}{x^2+3x+2}=\int\frac{dx}{(x+1)(x+2)}=\int\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)dx$

$=\ln|x+1|-\ln|x+2|+C$

Svar: $\ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right|+C$

3.



$\iint_D (y-x)\,dx\,dy=\int_0^2 dx\int_0^x (y-x)\,dy$

$=\int_0^2\left(\frac{y^2}{2}-xy\right)_0^x dx=$

$=\int_0^2\left(\frac{x^2}{2}-x^2\right)dx=-\int_0^2\frac{x^2}{2}dx=\left[-\frac{x^3}{2\cdot 3}\right]_0^2=-\frac{4}{3}.$

Svar: $-\frac{4}{3}$

4.) (a) $e^x - \cos x - \sin x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + O(x^4) -$

$$- \left(1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4)\right) - \left(x - \frac{x^3}{6} + O(x^5)\right) =$$

$$= \underline{x^2 + \frac{x^3}{3} + O(x^4)}$$

(b) $$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos x - \sin x + ax^2 + bx + c}{x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + \frac{x^3}{3} + O(x^4) + ax^2 + bx + c}{x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{c + bx + x^2(1+a) + \frac{x^3}{3} + O(x^4)}{x^3}$$

är ändligt då och endast då $\begin{cases} c = 0 \\ b = 0 \\ 1+a = 0 \end{cases}$

dvs $c = 0$, $b = 0$, $a = -1$. I så fall

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{3} + O(x^4)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{3} + O(x)}{1} = \frac{1}{3}$$

Svar: $\frac{1}{3}$

5. $y = x^{1/2} - \frac{1}{3}x^{3/2}$, $0 \le x \le 3 \Rightarrow ds = \sqrt{1 + y'^2}\,dx$

$$y' = \frac{1}{2}x^{-1/2} - \frac{1}{2}x^{1/2} \Rightarrow 1 + y'^2 = 1 + \frac{x^{-1} - 2 + x}{4} =$$

$$= \frac{x^{-1} + 2 + x}{4} = \frac{(x^{-1/2} + x^{1/2})^2}{4}$$

$$S = \int_0^3 \sqrt{1+y'^2}\,dx = \int_0^3 \frac{x^{-1/2} + x^{1/2}}{2}\,dx = \frac{1}{2}\left(2x^{1/2} + \frac{2}{3}x^{3/2}\right)_0^3$$

$$= \left(\sqrt{x} + \frac{1}{3}x\sqrt{x}\right)_0^3 = 2\sqrt{3} \quad \text{(l.e.)}$$

Svar: $\underline{s = 2\sqrt{3}}$

6. $f(x,y) = y e^{x^2-y^2}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y e^{x^2-y^2} \cdot 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = e^{x^2-y^2} + y e^{x^2-y^2} \cdot (-2y).$$

$$\frac{1}{x} \cdot 2xy e^{x^2-y^2} + \frac{1}{y}\left(e^{x^2-y^2} - 2y^2 e^{x^2-y^2}\right) = \frac{a}{y^2} \cdot y e^{x^2-y^2}$$

$$\Updownarrow$$

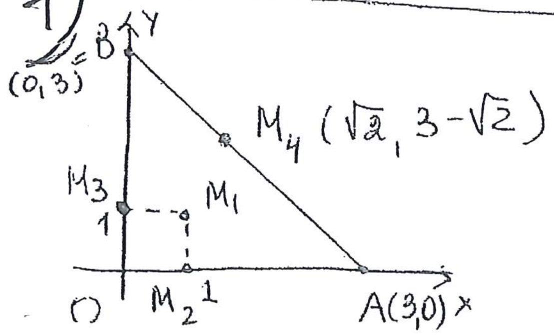
$$2y + \frac{1}{y} - 2y = \frac{a}{y}$$

$$\Updownarrow$$

$$a = 1$$

Svar: $a = 1$.

7)



$f(x,y) = 2x^3 - 3x^2 + 3y^2 - 6y$

- stationära punkter:

$$\begin{cases} f'_x = 6x^2 - 6x = 6x(x-1) = 0 \\ f'_y = 6y - 6 = 6(y-1) = 0 \end{cases}$$

forts. nästa sida.

Det finns 2 stationära punkter:

$M_1 = (1,1) \in D$, $(0,1)$ - ej aktuell ty den ligger på randen.

$f(M_1) = f(1,1) = \underline{\underline{-4}}$

- Randpunkter:

OA: $y = 0 \Rightarrow f(x,0) = 2x^3 - 3x^2$, $0 \leq x \leq 3$

- $f'(x,0) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1) = 0$ då $x = 0$ eller $x = 1 \Rightarrow M_2 = (1,0)$

randpunkt $\quad\quad \underset{(0,3)}{\uparrow}$

$f(M_2) = f(1,0) = \underline{\underline{-1}}$

- randpunkter:

$f(O) = f(0,0) = \underline{\underline{0}}$, $f(A) = f(3,0) = \underline{\underline{27}}$

OB: $x = 0 \Rightarrow f(0,y) = 3y^2 - 6y$, $0 \leq y \leq 3$

- $f'(0,y) = 6y - 6 = 6(y-1) = 0$ då $y = 1 \in (0,3)$, sätt $M_3 = (0,1)$

$f(M_3) = f(0,1) = \underline{\underline{-3}}$

- randpunkter: $O = (0,0)$, $B = (0,3)$

$f(B) = f(0,3) = \underline{\underline{9}}$

AB: $x + y = 3 \Rightarrow y = 3 - x \Rightarrow f(x, 3-x) = 2x^3 - 12x + 9$, $0 \leq x \leq 3$

- $f'(x, 3-x) = 6x^2 - 12 = 6(x^2 - 2) =$ då $x = -\sqrt{2} \notin (0,3)$, $x = \sqrt{2} \in (0,3)$

sätt $M_4 = (\sqrt{2}, 3 - \sqrt{2})$

$f(M_4) = f(\sqrt{2}, 3-\sqrt{2}) = \underline{\underline{9 - 8\sqrt{2}}}$

- Vi väljer $f_{max} = f(A) = 27$, $f_{min} = f(M_1) = -4$

<u>Svar:</u> $\boxed{\begin{aligned} f_{max} &= f(3,0) = 27 \\ f_{min} &= f(1,1) = -4. \end{aligned}}$