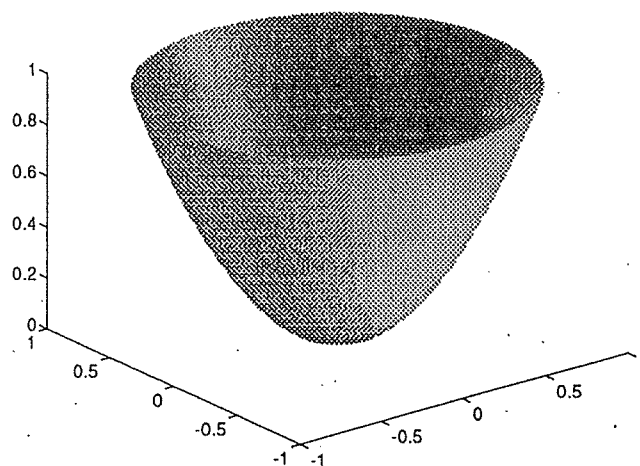


1 Funktioner av flera variabler

1.1 Funktionsbegreppet

En funktion, vars värdemängd består av reella tal, kallas en *reellvärd funktion*. Du har redan bekantat dig med reellvärda funktioner av en reell variabel, $y = f(x)$, d v s funktioner som till varje reellt tal x i någon mängd $D_f \subset \mathbf{R}$ ordnar ett värde y i $V_f \subset \mathbf{R}$. En sådan funktion sägs vara en funktion från $\mathbf{R}$ till $\mathbf{R}$. I detta kapitel skall vi studera funktioner som beror på fler variabler. En reellvärd funktion som beror av n stycken variabler sägs vara en funktion från $\mathbf{R}^n$ till $\mathbf{R}$.

Exempel 1.1 $f(x, y) = x^2 + y^2$ är en funktion från $\mathbf{R}^2$ till $\mathbf{R}$. Vi kan här åskådliggöra funktionen geometriskt genom att rita *funktionsytan* $z = f(x, y)$ i ett koordinatsystem i rummet. Vi ser att med $y = 0$ fås $z = f(x, 0) = x^2$, vilket är ekvationen för en parabel. Låter vi å andra sidan $z \geq 0$ vara fixt, får vi $z = x^2 + y^2$, vilket är ekvationen för en cirkel med radie $\sqrt{z}$. Av detta resonemang kan vi sluta oss till att funktionsytan $z = x^2 + y^2$ är en paraboloid.

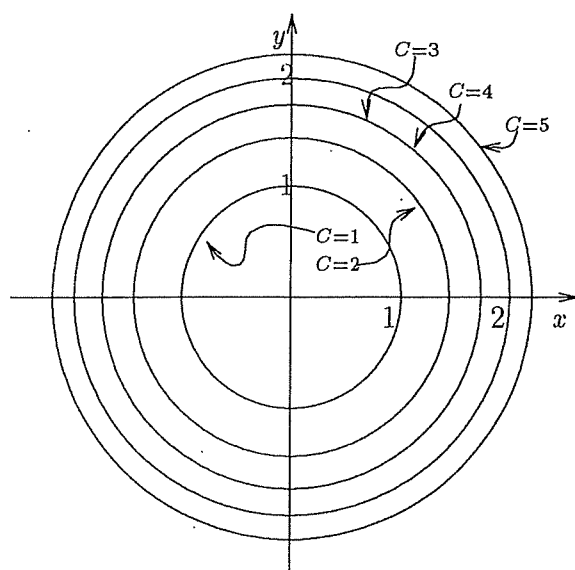


Figur 1.1: Paraboloiden $z = x^2 + y^2$.

□

I exemplet ovan såg vi att vi kan få fram en bild av funktionsytan genom att titta efter hur det ser ut om x , y eller z är konstant. Ofta kan man på detta vis få en bra bild av hur ytan ser ut. Ett problem när vi skall rita en funktion av två variabler är dock att pappret är tvådimensionellt medan vi försöker rita en tredimensionell figur. En bra och mycket använd metod för att åskådliggöra en funktion av två variabler är att rita så kallade *nivåkurvor*, d v s kurvor där funktionsvärdet är konstant. Var och en som studerat en orienteringskarta har stött på höjdkurvor (höjden över havet är ju en funktion av två variabler, latitud och longitud). Likaså kan man på väderkartor få se isobarer och isotermer,

dvs kurvor som binder ihop orter med samma tryck respektive temperatur. För att få sådana nivåkurvor skär man funktionsytan $z = f(x, y)$ med plan $z = C$, för olika konstanter C . Skärningskurvans projektion i xy -planet har då ekvationen $f(x, y) = C$ och kallas *nivåkurvan till funktionen f på nivån C* . Genom att rita nivåkurvor för flera olika nivåer får man en tvådimensionell karta som illustrerar en tredimensionell figur. Om man dessutom väljer nivåerna *ekvidistant*, dvs så att avståndet mellan två närliggande nivåer är konstant, får man även en uppfattning om hur brant funktionen lutar. Ligger nivåkurvorna tätt lutar funktionen mer än om kurvorna ligger glest. Tittar vi på funktionen i exempel 1.1 igen och vill rita nivåkurvor, ser vi att vi skall rita kurvorna $x^2 + y^2 = C$. Om vi ritar dessa för $C = 1, 2, 3, 4, \dots$ får vi cirklar med radie 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $\dots$ dvs vi erhåller följande figur:



Figur 1.2: Nivåkurvor till funktionen $f(x, y) = x^2 + y^2$.

Vill man åskådliggöra funktioner från $\mathbf{R}^3$ till $\mathbf{R}$ blir det värre, nu behöver man fyra dimensioner för att rita figuren. Ett sätt att kringgå detta problem är att, i analogi med föregående, rita *nivåytor*, dvs ytor där funktionen är konstant. För funktioner från $\mathbf{R}^n$ till $\mathbf{R}$, där $n > 3$, finns egentligen inga bra metoder att åskådliggöra funktionerna på. Icke desto mindre är funktioner av flera variabler mycket vanliga.

Exempel 1.2 Temperaturen i en punkt i jordens atmosfär är en funktion av fyra variabler: latitud, longitud, altitud samt tiden. Detta är alltså en funktion från $\mathbf{R}^4$ till $\mathbf{R}$.

□

Exempel 1.3 Om man känner läget hos en bil vid varje tidpunkt kommer bilens hastighet att bero på en variabel, tiden. Hastigheten däremot är tvådimensionell (riktning och fart tex) dvs detta blir en funktion från $\mathbf{R}$ till $\mathbf{R}^2$.

□

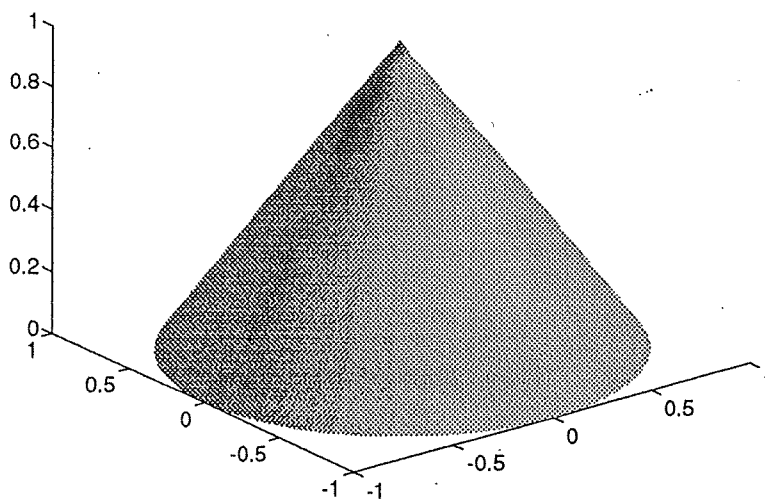
Exempel 1.4 Tyngdaccelerationen i en punkt i jordatmosfären är en funktion från $\mathbb{R}^3$ till $\mathbb{R}^3$.

□

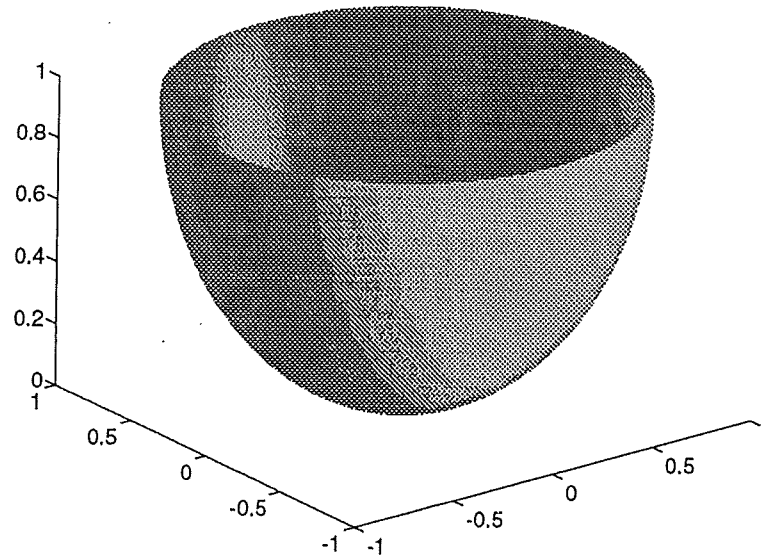
Slutligen bör man kanske påpeka att det finns möjligheter att ta datorer till hjälp för att åskådliggöra funktioner av två variabler. Det finns ett antal olika programpaket för detta, tex MATLAB, Maple och Mathematica. Programmen är likartade och vad man väsentligen behöver ange är hur funktionen $f(x, y)$ ser ut, över vilket område i xy -planet man vill rita ytan $z = f(x, y)$ samt hur fint rutnät man vill använda. I figur 1.3–1.7 nedan har MATLAB använts för att skapa en bild av

- En kon
- En halvsfär
- En enmantlad hyperboloid
- En tvåmantlad hyperboloid
- Ytan $z = (x^2 + 3y^2) \cdot e^{1-x^2-y^2}$, $|x| \leq 2$, $|y| \leq 2$

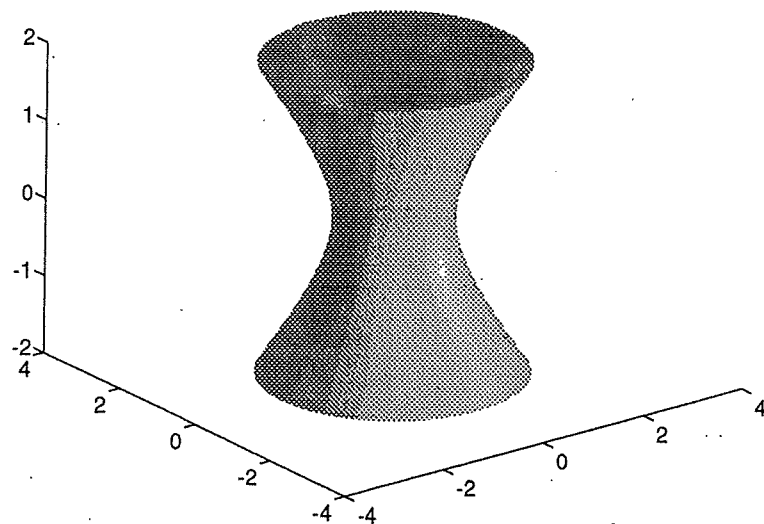
Dessutom har MATLAB använts för att rita paraboloiden i figur 1.1.



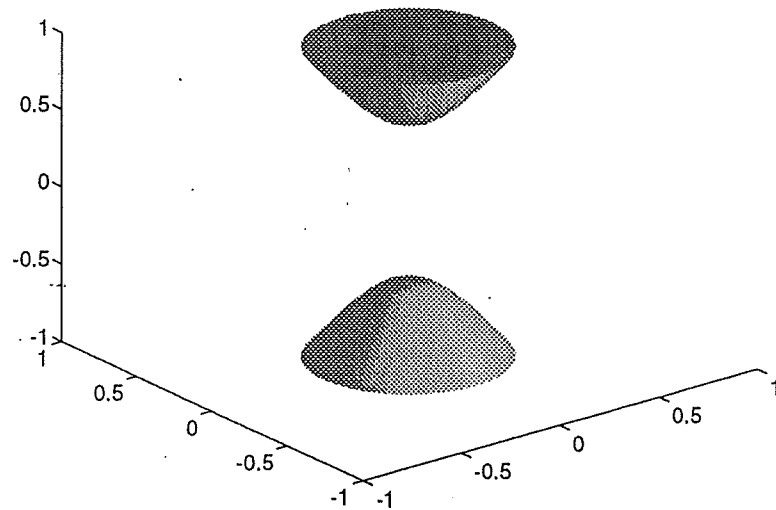
Figur 1.3: Konen $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$, $x^2 + y^2 \leq 1$.



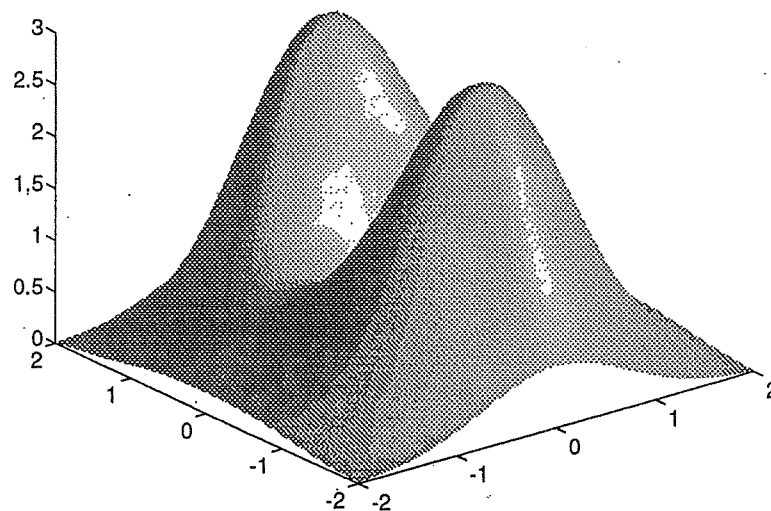
Figur 1.4: Halvsfären $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$, $z \leq 1$.



Figur 1.5: Enmantlade hyperboloiden $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, $-2 \leq z \leq 2$.



Figur 1.6: Tvåmantlade hyperboloiden $4z^2 - 16x^2 - 16y^2 = 1$, $0.5 \leq |z| \leq 1$.



Figur 1.7: Ytan $z = (x^2 + 3y^2) \cdot e^{1-x^2-y^2}$, $|x| \leq 2$, $|y| \leq 2$.

1.2 Partiella derivator

Låt f vara en funktion av flera variabler. En naturlig idé, om man vill studera en sådan funktion, är förstås att undersöka funktionens beroende av varje variabel var för sig. Mer precist, man undersöker hur funktionsvärdet ändras då endast en av variablerna ändras medan de övriga hålls konstanta. Det är denna idé som är bakgrunden till begreppet *partiella derivator*. Låt oss betrakta en funktion av två variabler, $f(x, y)$. Kan man säga något om funktionens beteende i punkten (x_0, y_0) ? Ja om vi fixerar $y = y_0$, får vi funktionen $f(x, y_0)$ som endast beror på x . Derivatans av funktionen $f(x, y_0)$ för $x = x_0$ kallas den partiella derivatan av $f(x, y)$ m.p. x i punkten (x_0, y_0) och betecknas $f'_x(x_0, y_0)$ eller $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$. Om vi i stället fixerar $x = x_0$ och varierar på y får vi analogt partiella derivatan av $f(x, y)$ m.p. y i punkten (x_0, y_0) . Denna betecknas förstås $f'_y(x_0, y_0)$ eller $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$. Tänker vi efter hur derivatan av en funktion av en variabel definierades, ser vi att vi gjort följande definition.

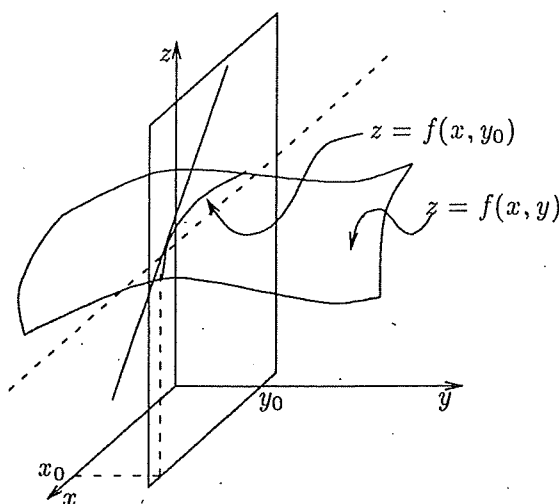
Definition 1.5 Låt $f(x, y)$ vara en funktion av två variabler. Då definieras de partiella derivatorna som

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$f'_y(x_0, y_0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}$$

förutsatt att gränsvärdena existerar.

Geometriskt kan de partiella derivatorna tolkas på följande sätt: Vi skär funktionsytan $z = f(x, y)$ med planet $y = y_0$, se figur 1.8 nedan.



Figur 1.8: Partiell derivata.

Skärningen mellan ytan och planet blir en kurva, $z = f(x, y_0)$. Den partiella derivatan $f'_x(x_0, y_0)$ kan tolkas som riktningskoefficienten för tangenten till denna kurva i den punkt på kurvan som svarar mot $x = x_0$. Skär vi i stället funktionsytan med planet $x = x_0$ får vi en annan kurva, $z = f(x_0, y)$. Den partiella derivatan $f'_y(x_0, y_0)$ kan analogt med föregående tolkas som riktningskoefficienten för tangenten till denna kurva. När vi nu skall beräkna den partiella derivatan m a p x är det bara att betrakta y som konstant och derivera med hjälp av de räknelagar vi redan känner till. Motsvarande gäller vi derivering m a p y .

Exempel 1.6 Bestäm f'_x och f'_y då

$$\text{a) } f(x, y) = y^2 \sin 2x + \frac{x^2}{y} + 2y \quad \text{b) } f(x, y) = 3(x^2 - y)^2.$$

Lösning:

$$\text{a) Vid derivering m a p } x \text{ betraktar vi } y \text{ som konstant och får } f'_x = 2y^2 \cos 2x + \frac{2x}{y}.$$

$$\text{Deriverar vi m a p } y \text{ är det } x \text{ som är konstant, så vi får } f'_y = 2y \sin 2x - \frac{x^2}{y^2} + 2.$$

$$\text{b) } f'_x = 6(x^2 - y) \cdot 2x = 12x(x^2 - y) \quad f'_y = 6(x^2 - y) \cdot (-1) = -6(x^2 - y) \quad \square$$

Söker vi de partiella derivatorna i en viss punkt sätter vi bara in punktens koordinater i uttrycken för f'_x och f'_y . Tex gäller i exempel 1.6b att

$$f'_x(1, 2) = 12 \cdot 1 \cdot (1^2 - 2) = -12$$

$$f'_y(1, 2) = -6 \cdot (1^2 - 2) = 6$$

Partiella derivator av funktioner av flera variabler definieras analogt med tvåvariabelfallet.

Exempel 1.7 De partiella derivatorna av $f(x, y, z) = e^{-x} \sin(yz^3) + 2xy$ är

$$\begin{aligned} f'_x &= -e^{-x} \sin(yz^3) + 2y \\ f'_y &= z^3 e^{-x} \cos(yz^3) + 2x \\ f'_z &= 3yz^2 e^{-x} \cos(yz^3) \end{aligned} \quad \square$$

Som vi sett finns det stora likheter mellan partiella derivator och "vanliga" derivator. Det finns dock även stora skillnader. Sedan tidigare vet vi att om en funktion av en variabel är deriverbar i en punkt så är den även kontinuerlig där. Om däremot en funktion av två variabler har partiella derivator i en punkt så behöver funktionen ej vara kontinuerlig där! Om vi tex låter

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & , \quad xy = 0 \\ 0 & , \quad xy \neq 0 \end{cases}$$

så får vi en funktion som är 1 på koordinataxlarna och 0 utanför. Den är således ej kontinuerlig i punkten $(x, y) = (0, 0)$ men $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$ (kolla det) dvs de partiella derivatorna existerar trots att funktionen ej är kontinuerlig. Om däremot de partiella derivatorna är kontinuerliga, vilket de vanligen är, så kan inga sådana här konstigheter uppträda.

Om nu f är en funktion av två variabler, x och y , så är f'_x och f'_y också funktioner av x och y . Var och en av dessa funktioner kan därför ha partiella derivator m a p x och y . Vi använder beteckningarna

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\end{aligned}$$

eller, alternativt

$$\begin{aligned}(f'_x)'_x &= f''_{xx} & (f'_x)'_y &= f''_{xy} \\ (f'_y)'_y &= f''_{yy} & (f'_y)'_x &= f''_{yx}\end{aligned}$$

På detta vis kan vi sedan fortsätta, var och en av dessa funktioner beror av x och y och kan eventuellt deriveras partiellt m a p dessa variabler. Tänker man efter lite inser man att det blir 2^n stycken partiella derivator av ordning n .

Exempel 1.8 Bestäm alla partiella derivator av ordning 2 till

$$f(x, y) = x^3 y^4 - 3xy + 4y^2 + 5y^3 x.$$

Lösning: $f'_x = 3x^2 y^4 - 3y + 5y^3$ och $f'_y = 4x^3 y^3 - 3x + 8y + 15y^2 x$. Detta ger i sin tur

$$\begin{aligned}f''_{xx} &= 6xy^4 & f''_{xy} &= 12x^2 y^3 - 3 + 15y^2 \\ f''_{yy} &= 12x^3 y^2 + 8 + 30xy & f''_{yx} &= 12x^2 y^3 - 3 + 15y^2\end{aligned}$$

□

Vi ser att i detta exempel är $f''_{xy} = f''_{yx}$, dvs det spelar ingen roll i vilken ordning vi deriverar. Detta är ingen slump. Denna egenskap gäller under ganska lindriga förutsättningar, vilka vi formulerar i följande sats.

Sats 1.9 Om f''_{xy} och f''_{yx} existerar i en omgivning av (x_0, y_0) och är kontinuerliga i (x_0, y_0) så är $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$.

Beviset bygger på att man använder medelvärdessatsen för funktioner av en variabel på ett listigt sätt ett flertal gånger. Den intresserade läsaren kan studera beviset i tex [12].

1.3 Felfortplantning

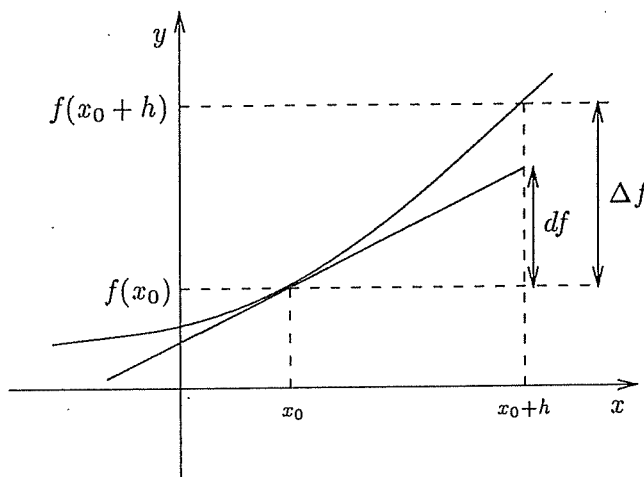
Låt f vara en deriverbar funktion av en variabel. Om man känner $f(x_0)$ och vill se hur en liten ändring av x påverkar funktionsvärdet kan man förstås titta på differensen, dvs $\Delta f = f(x_0 + h) - f(x_0)$. Om nu f är deriverbar i punkten x_0 så gäller som bekant att

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0).$$

Låt

$$\varepsilon(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0), \quad h \neq 0.$$

Då gäller att $\Delta f = f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot h + \varepsilon(h) \cdot h$ då $h \neq 0$. Av definitionen av $\varepsilon(h)$ följer att $\varepsilon(h) \rightarrow 0$ då $h \rightarrow 0$, alltså gäller att $\Delta f \approx f'(x_0) \cdot h$ om h är "litet". Uttrycket $f'(x_0) \cdot h$ kallas *differentialen* av f i punkten x_0 och betecknas df . Vi åskådliggör differentialen och differensen i figur 1.9 nedan.



Figur 1.9: Differens och differential.

Differentialen är alltså den linjära approximationen av differensen, man betraktar kurvans tangent i stället för kurvan själv. Om vi i stället för h kallar den lilla x -ändringen dx och låter bli att skriva ut x_0 , kommer differentialen att bli $df = f' \cdot dx = \frac{df}{dx} \cdot dx$ vilket är lätt att komma ihåg. Fördelen med att använda differentialen i stället för differensen är att differentialen ofta är enklare att bestämma.

Exempel 1.10 Bestäm ett närmevärde till $\sqrt{2}$.

Låt $f(x) = \sqrt{x}$. Sätt $x_0 = 1.96$ och $h = 0.04$ så blir $x_0 + h = 2$ (vi har alltså valt x_0 nära 2 så att $f(x_0)$ är känd). Eftersom $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ får vi att

$$\sqrt{2} = f(x_0 + h) \approx f(x_0) + df = \sqrt{1.96} + \frac{1}{2\sqrt{1.96}} \cdot 0.04 = 1.4 + \frac{0.02}{1.4} \approx 1.4142857.$$

(jämför med tabellvärdet $\sqrt{2} = 1.41421356 \dots$)

□

I exempel 1.10 ser vi att vi med handräkning får ett bra närmevärde på $\sqrt{2}$.

Differentialer används ofta vid uppskattning av hur mätfel påverkar försöksresultat. Det problem man studerar är följande. Man gör en experimentell bestämning av en storhet x för att bestämma en annan storhet $y = f(x)$. När man försöker mäta x gör man i allmänhet vissa mätfel och får i stället värdet $\bar{x}$ vilket i sin tur ger resultatet $\bar{y} = f(\bar{x})$. Felet blir då

$$\Delta y = f(x) - f(\bar{x}) = f(\bar{x} + \Delta x) - f(\bar{x}) \approx f'(\bar{x}) \cdot \Delta x,$$

där $\Delta x = x - \bar{x}$. För att markera att felet i funktionsvärdet orsakas av ett fel i variabelvärdet, betecknar vi felet Δ_{var} . Vi har alltså $\Delta_{var} \approx f'(\bar{x}) \cdot \Delta x$. Det vanliga är förstås att man ej känner felet Δx , utan bara en felgräns δ_x , dvs $|\Delta x| \leq \delta_x$. Utnyttjar vi detta, ser vi att $|\Delta_{var}| \approx |f'(\bar{x})| |\Delta x| \leq |f'(\bar{x})| \delta_x$. Introducerar vi slutligen felgränsen δ_{var} (dvs $|\Delta_{var}| \leq \delta_{var}$) får vi den *approximativa felfortplantningsformeln*:

$$\delta_{var} \approx |f'(\bar{x})| \cdot \delta_x. \quad (1.1)$$

Exempel 1.11 Man har mätt upp en storhet $x = 4.0 \pm 0.4$. Beräkna, med approximativ felgräns, a) x^2 b) $\sqrt{x}$.

Lösning. Vi har $\bar{x} = 4$ och $\delta_x = 0.4$. Felfortplantningsformeln ger nu

$$a) f(x) = x^2, f'(x) = 2x, \delta_{var} \approx |f'(\bar{x})| \cdot \delta_x = 3.2 \quad \text{så} \quad x^2 \approx 16 \pm 3.2.$$

$$b) f(x) = \sqrt{x}, f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \delta_{var} \approx |f'(\bar{x})| \cdot \delta_x = 0.1 \quad \text{så} \quad \sqrt{x} \approx 2 \pm 0.1.$$

□

Exempel 1.12 Antag att vi känner $\sqrt{2}$, $\sqrt{8}$ och $\sqrt{32}$ med 2 korrekta decimaler (dvs felgräns 0.005). Vilket av uttrycken a) $(\sqrt{2})^3$ b) $\frac{\sqrt{32}}{2}$ c) $\sqrt{8}$

ger bästa noggrannheten på $\sqrt{8}$? (De tre uttrycken är ekvivalenta.)

Lösning.

$$a) f(x) = x^3, f'(x) = 3x^2 \text{ och } \delta_x = 0.005 \text{ ger } \delta_{var} \approx 0.030.$$

$$b) f(x) = \frac{x}{2}, f'(x) = \frac{1}{2} \text{ och } \delta_x = 0.005 \text{ ger } \delta_{var} \approx \frac{1}{2} \cdot 0.005 = 0.0025.$$

$$c) \text{ Här är förstås } \delta_{var} = \delta_x = 0.005.$$

Som synes ger $\frac{\sqrt{32}}{2}$ det bästa närmevärdet på $\sqrt{8}$.

□

Som vi ser i exempel 1.12 ovan behöver matematiskt ekvivalenta uttryck ej vara numeriskt ekvivalenta. Olika metoder för att beräkna samma funktionsvärde kan ge väsentligen olika noggrannhet. Vi tar ett exempel till

Exempel 1.13 Vi söker rötterna till andragradsekvationen $x^2 - 56x + 1 = 0$.

Med hjälp av en tabell över rötter som ger 3 decimalers noggrannhet får vi

$$x_1 = 28 - \sqrt{783} = 0.018 \pm 0.0005 \quad x_2 = 28 + \sqrt{783} = 55.982 \pm 0.0005.$$

Det absoluta felet är lika stort hos x_1 och x_2 , men vi ser att det relativa felet hos x_1 är mycket större än hos x_2 . Nu gäller dock att produkten av rötterna är lika med konstanttermen i ekvationen, dvs $x_1 \cdot x_2 = 1$. Ur detta får vi $x_1 = \frac{1}{x_2}$ så $x_1 \approx \frac{1}{55.982} \approx 0.01786289$. Hur stort är felet? Låt $f(x) = \frac{1}{x}$ så ger ekvation 1.1 att felgränsen hos x_1 blir $\delta_{x_1} \approx 0.16 \cdot 10^{-6}$. Alltså är $x_1 \approx 0.01786289 \pm 0.16 \cdot 10^{-6}$ dvs de båda rötterna är

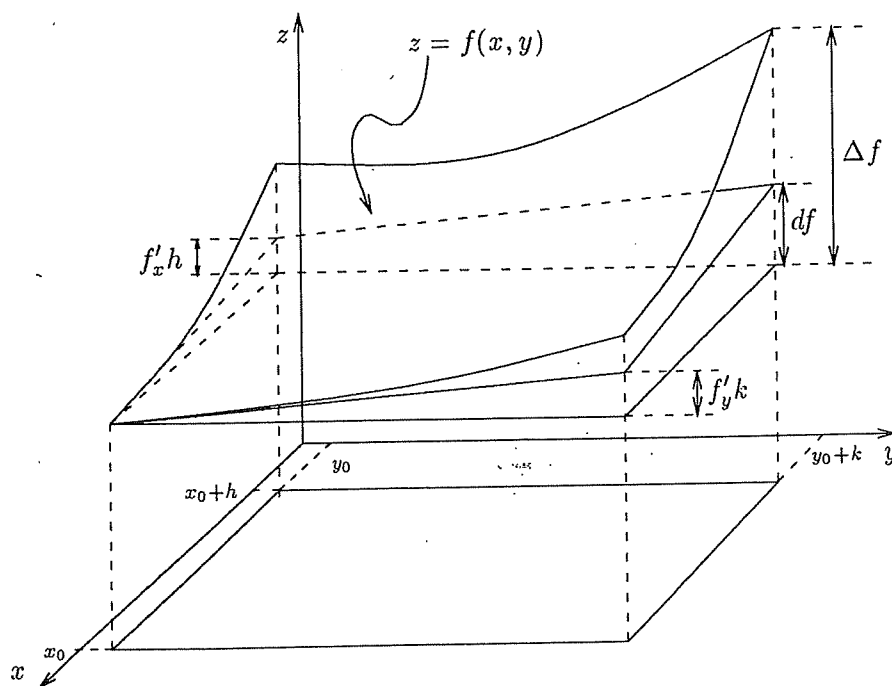
$$x_1 \approx 0.017863 \quad x_2 \approx 55.982$$

där det relativa felet är ungefär lika stort hos båda rötterna. □

Den approximativa felfortplantningsformeln låter sig direkt generaliseras till funktioner av flera variabler. Antag att vi vill beräkna $f(x_0 + h, y_0 + k)$ men endast har tillgång till $f(x_0, y_0)$. Då gäller för felet Δ_{var} att

$$\Delta_{var} = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) \approx f'_x(x_0, y_0) \cdot h + f'_y(x_0, y_0) \cdot k, \quad (1.2)$$

vilket vi kan se i figur 1.10 nedan.



Figur 1.10: Differens och differential hos en funktion av två variabler.

Högerledet i ekvation 1.2 ovan kallas differentialen av f och om vi i analogi med tidigare resonemang ersätter h med dx och k med dy får vi att differentialen av f blir

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot dy.$$

Precis som i envariabelfallet känner man som regel inte felen, man vet bara närmevärden $\bar{x}$ och $\bar{y}$ samt felgränserna $|h| \leq \delta_x$, $|k| \leq \delta_y$. Ur detta fås slutligen

$$\delta_{var} \approx |f'_x(\bar{x}, \bar{y})| \cdot \delta_x + |f'_y(\bar{x}, \bar{y})| \cdot \delta_y.$$

Exempel 1.14 Låt $f(x, y) = x + y$. Eftersom $f'_x = f'_y = 1$ får vi $\delta_{var} = \delta_x + \delta_y$ dvs felgränserna adderas vid addition.

□

Exempel 1.15 Om $f(x, y) = x - y$, fås på samma sätt som ovan $\delta_{var} = \delta_x + \delta_y$ dvs felgränserna adderas vid subtraktion.

□

Exempel 1.16 Med $f(x, y) = x \cdot y$ får vi $f'_x = y$, $f'_y = x$, så

$$\delta_{var} \approx |\bar{y}| \delta_x + |\bar{x}| \delta_y$$

vilket ger att

$$\frac{\delta_{var}}{|\bar{x} \cdot \bar{y}|} \approx \frac{\delta_x}{|\bar{x}|} + \frac{\delta_y}{|\bar{y}|}$$

dvs relativa felgränserna adderas vid multiplikation.

□

Exempel 1.17 Om $f(x, y) = \frac{x}{y}$ så fås också att relativa felgränserna adderas, dvs

$$\frac{\delta_{var}}{|\bar{x}/\bar{y}|} \approx \frac{\delta_x}{|\bar{x}|} + \frac{\delta_y}{|\bar{y}|}.$$

Det lämnas som övning för läsaren att verifiera detta.

□

Är f en funktion av n stycken variabler, blir differentialen

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n, \quad (1.3)$$

så den approximativa felfortplantningsformeln, i den allmänna tappningen, lyder

$$\delta_{var} \approx \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| \delta_{x_1} + \left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right| \delta_{x_2} + \dots + \left| \frac{\partial f}{\partial x_n} \right| \delta_{x_n} \quad (1.4)$$

där alla partiella derivator beräknas i punkten $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$.

Exempel 1.18 Funktionen $f(x, y, z) = x^2 \sqrt{y} z^5$. x , y och z uppmätes till

$$x = 1 \pm 0.05, \quad y = 4 \pm 0.05, \quad z = 1 \pm 0.05.$$

- a) Bestäm närmevärde och approximativ felgräns för $f(x, y, z)$.
b) Om man vill förbättra noggrannheten i närmevärdet, vilken av variablerna skall man i första hand mäta noggrannare?

Lösning.

a) $f'_x = 2x\sqrt{y}z^5$, $f'_y = \frac{x^2 z^5}{2\sqrt{y}}$, $f'_z = 5x^2 \sqrt{y} z^4$ vilket ger

$$\delta_{var} \approx |f'_x| \delta_x + |f'_y| \delta_y + |f'_z| \delta_z = 4\delta_x + 0.25\delta_y + 10\delta_z = 0.7125$$

så $f(x, y, z) \approx 2 \pm 0.7125$.

- b) Felet i x , y och z ger upphov till felen $|f'_x| \delta_x = 0.2$, $|f'_y| \delta_y = 0.0125$ respektive $|f'_z| \delta_z = 0.5$. Det är alltså felet i z som ger det största bidraget till felet i funktionsvärdet. Förbättra således i första hand mätningen av z .

□

1.4 Övningsuppgifter

1.1 Rita funktionsytan $z = -x - y + 1$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1 - x$.

1.2 Rita funktionsytan

a) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

b) $z = -\sqrt{4 - x^2 - y^2}$

c) $z = 1 - \sqrt{4 - (x+2)^2 - (y-1)^2}$.

1.3 Rita funktionsytan $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \leq x^2 + y^2 \leq 1$.

1.4 Rita funktionsytan $f(x, y) = 1 - x^2$, $|x| \leq 1$.

1.5 Rita värdemängden till funktionen

a) $\bar{r}(t) = (t, t^2)$, $-1 \leq t \leq 1$

b) $\bar{r}(t) = (1 + \cos t, -2 + \sin t)$.

1.6 Rita kurvorna

a) $(x, y, z) = (t, 0, t^2)$, $t \in \mathbf{R}^n$

b) $\bar{r}(t) = (4 \cos t, 4 \sin t, t)$, $0 \leq t \leq 4\pi$.

1.7 Bestäm f'_x och f'_y då $f(x, y) =$

a) $5x^4y^2 - 3x^3 - 2x^2y^3 + 5y$ b) $\frac{x^3 + y^2}{x^2 + y^3} + y^2$ c) $(5x^2y - y^3 + 3x)^4$

d) $\arctan \frac{y}{x}$ e) $(xy - y^3)e^{xy^2}$ f) y^{xy} .

1.8 Bestäm f'_x , f'_y och f'_z då $f(x, y, z) =$

a) $\frac{e^{x^2yz}}{1 + z^2}$ b) $xz \cos^2(y^2 + 2z)$.

1.9 Bestäm alla partiella derivator av ordning 2 till

a) $f(x, y) = e^{2x} \sin(x - y)$ b) $f(x, y) = \arctan \frac{x}{y}$

c) $f(x, y, z) = \ln(x^2 + xy + yz)$.

1.10 Låt $z = \ln(e^x + e^y)$. Visa att

a) $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1$ b) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 = 0$.

1.11 Låt $F(x, y, t) = \frac{1}{t} \cdot e^{-(x^2+y^2)/at}$. Bestäm konstanten a så att F satisfierar den partiella

differentialekvationen $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{\partial F}{\partial t}$.

1.12 Visa att det inte kan finnas någon funktion $f(x, y)$ med kontinuerliga partiella derivator av andra ordningen sådan att $f'_x = x + 3yx^2$ och $f'_y = x^3 + xy$.

1.13 Bestäm felgränsen i följande uttryck när $x = 2.00$, $y = 3.00$ och $z = 4.00$ är korrekt avrundade:

a) $3x + y - z$ b) $\frac{x \cdot y}{z}$ c) $\frac{x^3 \cdot y}{\sqrt{z}}$

1.14 Man vill bestämma volymen av en cylindrisk burk. Höjden har uppmätts till 8 ± 0.1 cm och diametern till 16 ± 0.4 cm. Beräkna den relativa felgränsen i volymsvärdet.

1.15 Ange, med feluppskattning, fallsträckan s för en kropp som faller i 2.57 ± 0.01 s, om man vet att $s = \frac{1}{2}gt^2$ och $g = 9.81 \pm 0.02$ m/s².

1.16 Beräkna Δf och df om $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$, $x_0 = 1$ och $h = 0.01$ respektive $h = 0.1$.

1.17 Beräkna, med hjälp av differentialer, närmevärden till

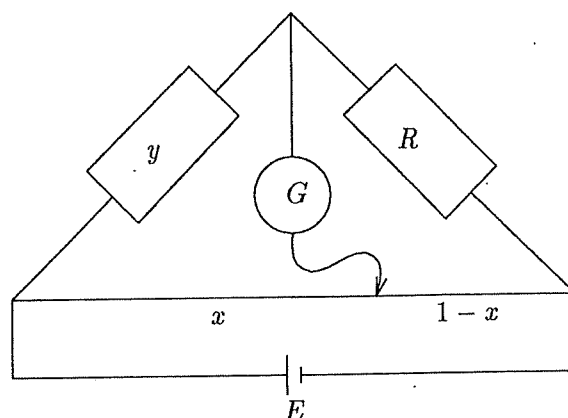
a) $\sqrt{99}$ b) $\frac{1}{1001}$ c) $\ln 1.03$ d) $(0.983)^{10}$

1.18 Man önskar beräkna uttrycket $(\sqrt{2} - 1)^6$ ur närmevärdet $\sqrt{2} \approx 1.4$. Man kan då välja mellan att sätta in närmevärdet direkt i uttrycket eller också i något av följande ekvivalenta uttryck:

a) $\frac{1}{(\sqrt{2} + 1)^6}$ b) $(3 - 2\sqrt{2})^3$ c) $\frac{1}{(3 + 2\sqrt{2})^3}$
 d) $99 - 70\sqrt{2}$ e) $\frac{1}{99 + 70\sqrt{2}}$

Vilket av alternativen är att föredra? Använd felgränsen 0.015 för närmevärdet till $\sqrt{2}$.

1.19 Resistansen y hos ett elektriskt motstånd skall bestämmas mha en Wheatstone-brygga, enligt figuren nedan.

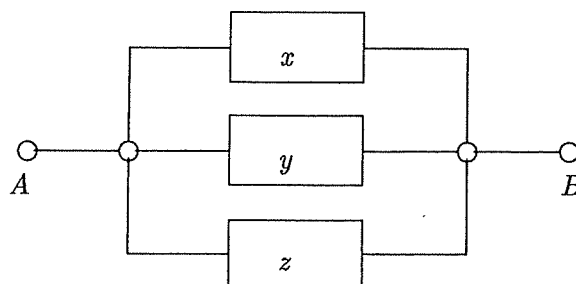


Då ingen ström flyter genom amperemetern gäller sambandet $y = \frac{Rx}{1-x}$. Man förfogar över två jämförelsemotstånd $R_1 = 49.986 \pm 0.002 \Omega$ och $R_2 = 180.35 \pm 0.02 \Omega$. Vid en preliminär mätning med användning av R_1 fann man att $x = 0.786$. Om man nu vill bestämma y , vilket av motstånden R_1 och R_2 är det fördelaktigast att utnyttja vid mätningen? Hur stort blir det maximala felet i y i vardera fallet om maximala felet i x kan uppskattas till 0.002?

- 1.20** Vid ett pendelförsök för att bestämma tyngdaccelerationen g cm/s² är pendelns längd l cm och tiden för en hel svängning T s. Man kan därvid visa att $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. Antag att $l \approx 100$ cm. Hur noggrant måste π anges, respektive l och T bestämmas för att dessa tre storheter var för sig ej skall ge upphov till större fel än 0.2 cm/s² vid bestämning av g ?

Ledning: Utnyttja att $g \approx 981$ cm/s² för att bestämma den svängningstid som fås för pendellängden 100 cm.

- 1.21** Tre motstånd kopplas parallellt enligt figuren nedan.



Motstånden har resistanserna x , y resp z ohm, där $x = 3.05 \pm 0.05$, $y = 4.28 \pm 0.03$ och $z = 5.32 \pm 0.07$. Resistansen mellan A och B ges via sambandet

$$R(x, y, z) = \frac{xyz}{xy + xz + yz}.$$

Beräkna ett korrekt värde för resistansen mellan A och B , dvs närmevärde plus approximativ felgräns.

- 1.22** Svängningstiden hos en matematisk pendel ges av sambandet

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

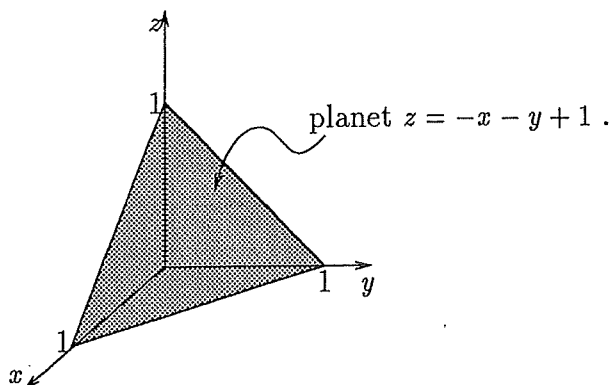
där l =pendelns längd och g =tyngdaccelerationen. Storheterna l och g uppmäts med absolut felgräns δl resp δg . π betraktas som konstant. Visa att

$$\frac{\delta T}{T} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\delta l}{l} + \frac{\delta g}{g} \right).$$

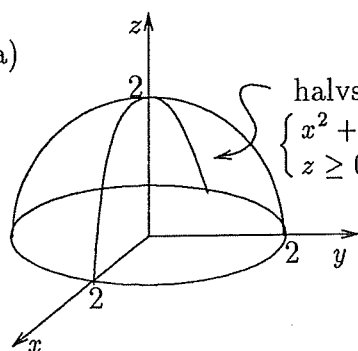
Facit

Kapitel 1

1.1

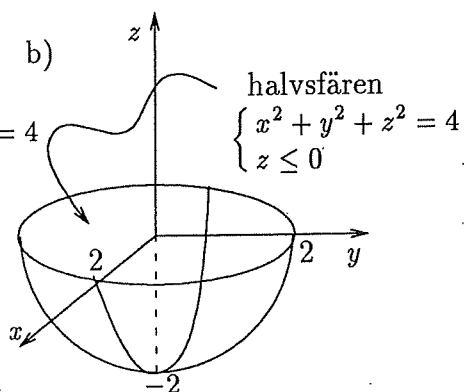


1.2 a)



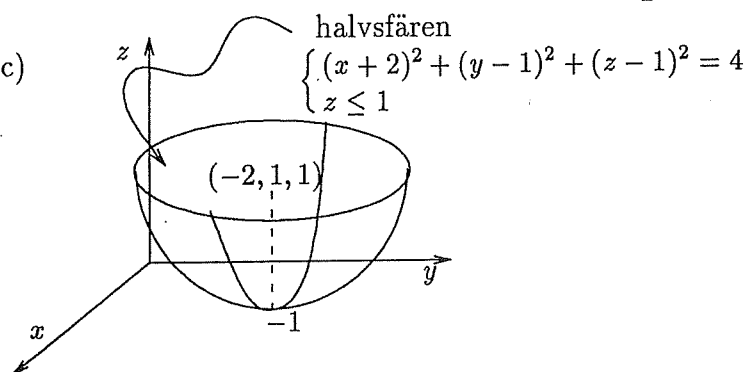
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ z \geq 0 \end{cases}$$

b)

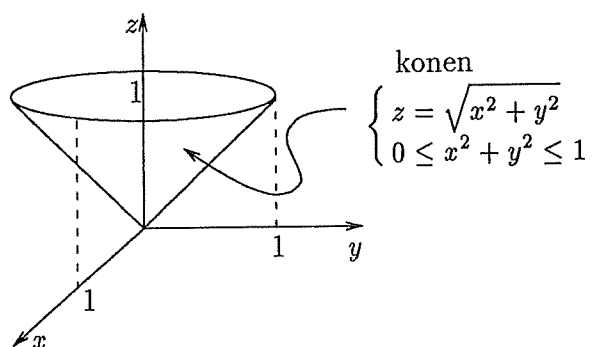


$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ z \leq 0 \end{cases}$$

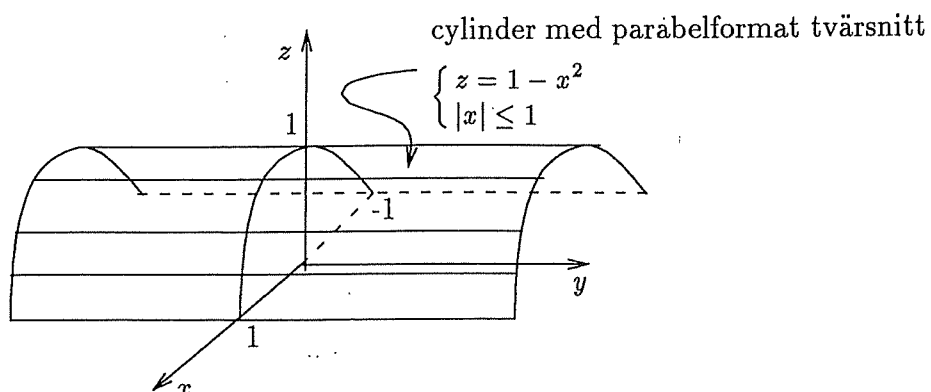
c)



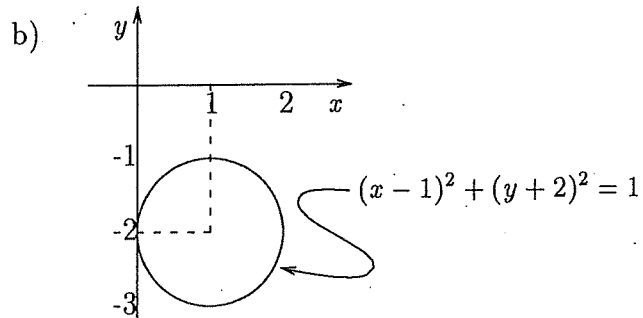
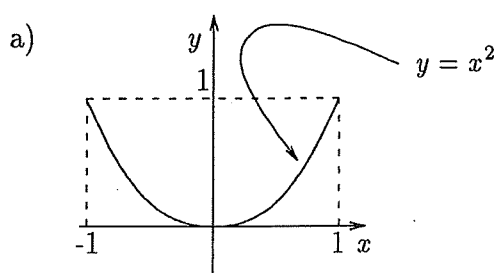
1.3



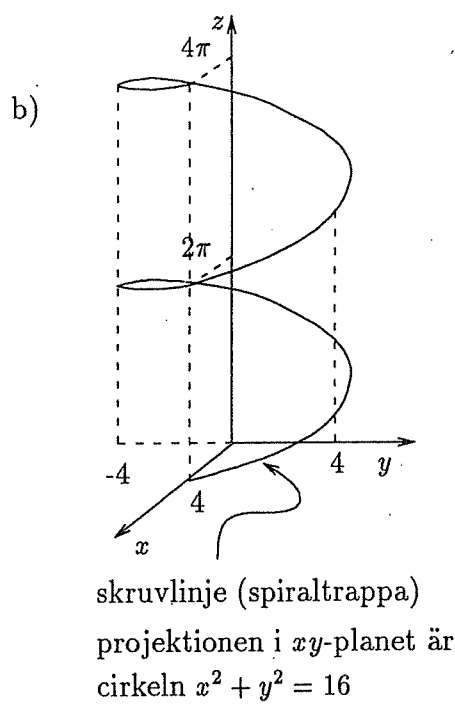
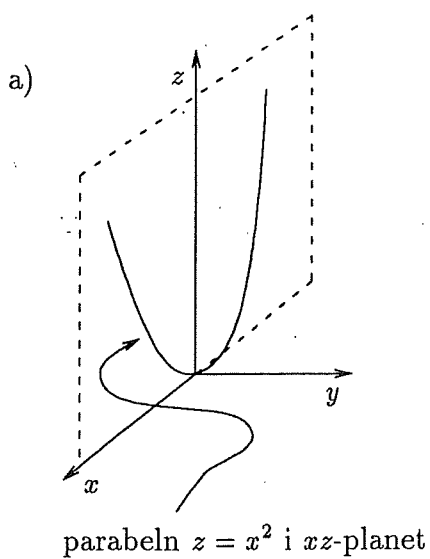
1.4



1.5



1.6



1.7 a) $f'_x = 20x^3y^2 - 9x^2 - 4xy^3$, $f'_y = 10x^4y - 6x^2y^2 + 5$

b) $f'_x = \frac{x^4 + 3x^2y^3 - 2xy^2}{(x^2 + y^3)^2}$, $f'_y = \frac{2x^2y - 3x^3y^2 - y^4}{(x^2 + y^3)^2} + 2y$

c) $f'_x = 4(5x^2y - y^3 + 3x)^3(10xy + 3)$, $f'_y = 4(5x^2y - y^3 + 3x)^3(5x^2 - 3y^2)$

d) $f'_x = -\frac{y}{x^2 + y^2}$, $f'_y = \frac{x}{x^2 + y^2}$

e) $f'_x = (y + xy^3 - y^5)e^{xy^2}$, $f'_y = (x - 3y^2 + 2x^2y^2 - 2xy^4)e^{xy^2}$

f) $f'_x = y^{xy+1} \ln y$, $f'_y = (x \ln y + x)y^{xy}$

1.8 a) $f'_x = \frac{2xyz e^{x^2yz}}{1 + z^2}$, $f'_y = \frac{x^2z e^{x^2yz}}{1 + z^2}$, $f'_z = \frac{(x^2y + x^2yz^2 - 2z) e^{x^2yz}}{(1 + z^2)^2}$

b) $f'_x = z \cos^2(y^2 + 2z)$, $f'_y = -4xyz \cos(y^2 + 2z) \sin(y^2 + 2z)$

$f'_z = x \cos^2(y^2 + 2z) - 4xz \cos(y^2 + 2z) \sin(y^2 + 2z)$

1.9 a) $f''_{xx} = (3 \sin(x - y) + 4 \cos(x - y))e^{2x}$

$f''_{xy} = f''_{yx} = (\sin(x - y) - 2 \cos(x - y))e^{2x}$

$f''_{yy} = -\sin(x - y)e^{2x}$

b) $f''_{xx} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}$, $f''_{xy} = f''_{yx} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$, $f''_{yy} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$

c) $f''_{xx} = \frac{-2x^2 - 2xy - y^2 + 2yz}{(x^2 + xy + yz)^2}$, $f''_{xy} = f''_{yx} = \frac{-x^2 - 2xz}{(x^2 + xy + yz)^2}$

$f''_{xz} = f''_{zx} = \frac{-2xy - y^2}{(x^2 + xy + yz)^2}$, $f''_{yy} = \frac{-(x + z)^2}{(x^2 + xy + yz)^2}$

$f''_{yz} = f''_{zy} = \frac{x^2}{(x^2 + xy + yz)^2}$, $f''_{zz} = \frac{-y^2}{(x^2 + xy + yz)^2}$

1.11 $a = 4$

1.13 a) $2.5 \cdot 10^{-2}$ b) $0.82 \cdot 10^{-2}$ c) $12 \cdot 10^{-2}$

1.14 $\frac{\delta V}{V} \approx 6.25\%$

1.15 32.4 ± 0.4 meter

1.16 $\Delta f = -0.029999$, $df = -0.03$ respektive $\Delta f = -0.299$, $df = -0.3$.

1.17 a) 9.95 b) 0.000999 c) 0.03 d) 0.83

1.18 Man erhåller följande uppskattningar på δ_{var} :
 $9.3 \cdot 10^{-4}$, $2.0 \cdot 10^{-4}$, $3.6 \cdot 10^{-3}$, $8.0 \cdot 10^{-5}$, 1.05 resp $2.8 \cdot 10^{-5}$.
 Sista uttrycket är alltså bäst.

1.19 Om R_1 används blir maximala felet $|\Delta y| \approx 2.2 \Omega$.

Används R_2 blir max-felet i stället $|\Delta y| \approx 1.5 \Omega$.

R_2 bör alltså vara fördelaktigare att använda.

1.20 $|\Delta \pi| \leq 0.00033$, $|\Delta I| \leq 0.021 \text{ cm}$, $|\Delta T| \leq 0.00021 \text{ s}$

1.21 $R = 1.334 \pm 0.018 \text{ ohm}$

4.2. Största och minsta värde.

I detta avsnitt skall vi se på problemet att bestämma det *största* och det *minsta* värde som en reellvärd funktion f kan anta i punkterna i en given delmängd M av $\mathbf{R}^n$, $n \geq 2$. Man talar då också om *globalt maximum* eller *minimum* av f på M (i motsats till lokalt maximum eller minimum i en punkt. då man bara jämför funktionsvärdena i någon omgivning av punkten.)

Vi skall använda några topologiska begrepp från avsnitt 1.3, som alltså bör läsas (repeteras) innan exemplen i det följande studeras. Bl.a. skall vi stödja oss på

Satsen om existens av största och minsta värde.

Om f är en reellvärd funktion, som är definierad och kontinuerlig på en kompakt mängd M i $\mathbf{R}^n$, så har f ett största och ett minsta värde på M .

Exempel 1.

Vi skall bestämma största och minsta värdet av

$$f(x, y) = \frac{3xy + x - y - 1}{1 + x^2 + y^2}$$

på den halvcirkelskiva M i $\mathbf{R}^2$ som ges av olikheterna

$$x^2 + y^2 \leq 1 \quad \text{och} \quad x \geq 0$$

M är kompakt, ty M är uppenbarligen begränsad, och dessutom är M sluten, ty M innehåller hela sin rand, som består av sträckan och halvcirkelbågen från $(0, -1)$ till $(0, 1)$ i fig 1.

Vidare är funktionen f kontinuerlig bl.a. på M . Enligt satsen ovan har $f(x, y)$ därför ett största och ett minsta värde då (x, y) varierar i M .

Programmet är nu att bestämma de punkter i M , där f uppfyller villkor som är nödvändiga för att f skall kunna ha största eller minsta värde där. Sedan återstår bara att jämföra värdena av f i dessa möjliga punkter.

Vi måste då skilja på inre punkter och randpunkter till M .

Inre punkter till M .

Om f har sitt största eller minsta värde på M i en inre punkt till M , har f också lokalt maximum minimum i denna punkt enligt definition 1 i avsnitt 4.1. Varför? Sådana punkter hittar vi bland

- (a) stationära punkter för f , dvs. punkter (x, y) där

$$f'_x(x, y) = 0 \quad \text{och} \quad f'_y(x, y) = 0$$

- (b) punkter där f'_x eller f'_y inte existerar.

I detta exempel existerar f'_x och f'_y överallt och vi får villkoret

$$f'_x(x, y) = \frac{(3y + 1)(1 + x^2 + y^2) - 2x(3xy + x - y - 1)}{(1 + x^2 + y^2)^2} = 0$$

$$f'_y(x, y) = \frac{(3x - 1)(1 + x^2 + y^2) - 2y(3xy + x - y - 1)}{(1 + x^2 + y^2)^2} = 0$$

som förenklas till

$$(3y + 1)(1 + x^2 + y^2) = 2x(3xy + x - y - 1) \quad \text{och}$$

$$(3x - 1)(1 + x^2 + y^2) = 2y(3xy + x - y - 1)$$

Härav får vi sambanden

$$y(3y + 1) = x(3x - 1) \Leftrightarrow 3x^2 - 3y^2 - x - y = 0 \Leftrightarrow 3(x + y)(x - y) - (x + y) = 0$$

som ger

$$x + y = 0 \quad \text{eller} \quad 3(x - y) - 1 = 0 \quad \text{dvs.} \quad y = -x \quad \text{eller} \quad y = x - \frac{1}{3}$$

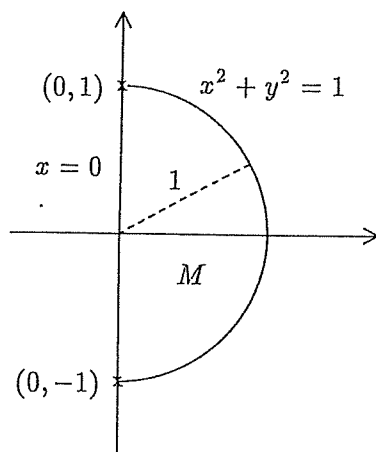


Fig 1

Vi kan sätta in $y = -x$ i $f'_x(x, y) = 0$ och får då efter förenkling

$$2x^2 + x - 1 = 0 \quad \text{som ger} \quad x = -1 \text{ och } y = 1 \quad \text{eller} \quad x = \frac{1}{2} \text{ och } y = -\frac{1}{2}$$

Med $y = x - \frac{1}{3}$ får vi på samma sätt

$$\frac{14x}{3} = 0 \quad \text{som ger} \quad x = 0 \text{ och } y = -\frac{1}{3}$$

Kontroll visar att $(0, -\frac{1}{3})$ inte uppfyller $f'_y(x, y) = 0$. Vi måste också kontrollera om punkterna ligger i M . Vi ser då att bara $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ duger.

Randpunkter till M .

Randen består av sträckan, som ges av $x = 0$, $-1 < y < 1$, och halvcirkelbågen med ekvation $x^2 + y^2 = 1$, $x > 0$, samt hörnpunkterna $(0, -1)$ och $(0, 1)$.

Om f har största eller minsta värde på M i en randpunkt, behöver denna punkt inte vara en stationär punkt för f . Varför? Vi studerar då i stället f som funktion på (en del av) randen, t.ex. genom att beskriva den i parameterform.

Enklast att behandla är den del där $x = 0$, $-1 < y < 1$. Vi får då en funktion av y :

$$f(0, y) = \frac{-y - 1}{1 + y^2}, \quad -1 < y < 1$$

och vi söker punkter y där denna funktion kan ha lokalt maximum eller minimum. Dessa punkter är stationära punkter för denna funktion, vilket betyder att de är lösningar till ekvationen

$$f'_y(0, y) = \frac{y^2 + 2y - 1}{(1 + y^2)^2} = 0$$

Vi får lösningarna $y = -1 \pm \sqrt{2}$, men bara $y = -1 + \sqrt{2}$ uppfyller $-1 < y < 1$. Vi får alltså punkten $(0, -1 + \sqrt{2})$.

Den del av randen, där $x^2 + y^2 = 1$, $x > 0$, kan t.ex. beskrivas i parameterform genom

$$x = \cos v, \quad y = \sin v, \quad -\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2}$$

(enligt definitionen av $\cos v$ och $\sin v$). Vi söker då lokala maximi- och minimipunkter för

$$f(\cos v, \sin v) = \frac{3 \cos v \sin v + \cos v - \sin v - 1}{2}$$

som funktion av v och vi sätter därför derivatan

$$\frac{d}{dv} f(\cos v, \sin v) = \frac{-3 \sin^2 v + 3 \cos^2 v - \sin v - \cos v}{2} = 0$$

Vi behöver här inte bestämma värden på v , som löser denna ekvation, utan vi kan gå tillbaka till $x = \cos v$ och $y = \sin v$ och får

$$-3x^2 + 3y^2 - y - x = 0 \quad \text{som ger} \quad y = -x \quad \text{eller} \quad y = x - \frac{1}{3}$$

(som förut). Detta skall nu sättas in i villkoret $x^2 + y^2 = 1$, $x > 0$. $y = -x$ ger då lösningen

$$(x, y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \quad (x = -\frac{1}{\sqrt{2}} < 0 \text{ duger inte})$$

medan $y = x - \frac{1}{3}$ ger

$$(x, y) = \left(\frac{1 + \sqrt{17}}{6}, \frac{-1 + \sqrt{17}}{6} \right) \quad (x = \frac{1 - \sqrt{17}}{6} < 0 \text{ duger inte})$$

(I avsnitt 4.3 skall vi behandla en annan metod, *Lagranges multiplikatormetod*, med vars hjälp vi också kan söka eventuella lokala maximi- och minimipunkter med bivillkor som t.ex. $x^2 + y^2 = 1$.)

Slutligen får vi inte glömma hörnpunkterna $(0, -1)$ och $(0, 1)$, som också skulle kunna ge största eller minsta värde av f på M utan att komma fram i de tidigare räkningarna. Vår för?

Det återstår nu att jämföra funktionsvärdena i de möjliga punkter, som vi har bestämt:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) &= -\frac{1}{2} & f(0, -1 + \sqrt{2}) &= -\frac{\sqrt{2}}{4 - 2\sqrt{2}} = -\frac{1 + \sqrt{2}}{2} \\ f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= -\frac{5 - 2\sqrt{2}}{4} & f\left(\frac{1 + \sqrt{17}}{6}, \frac{-1 + \sqrt{17}}{6}\right) &= \frac{1}{3} \\ f(0, -1) &= 0 & f(0, 1) &= -1 \end{aligned}$$

Vi får då

$$\begin{aligned} \text{största värdet} \quad f\left(\frac{1 + \sqrt{17}}{6}, \frac{-1 + \sqrt{17}}{6}\right) &= \frac{1}{3} \quad \text{och} \\ \text{minsta värdet} \quad f(0, -1 + \sqrt{2}) &= -\frac{1 + \sqrt{2}}{2} \quad \square \end{aligned}$$

Den logiska gången i lösningen är alltså följande: Vi visar först att funktionen f har ett största och ett minsta värde på mängden M . Det är naturligtvis inte alltid sant för godtyckliga funktioner och mängder. Men när som i exempel 1 funktionen är kontinuerlig och mängden är kompakt, kan vi som sagt använda satsen om existens av största och minsta värde för att dra den önskade slutsatsen. I exempel 3 och 4 behandlas några fall där mängden inte är kompakt.

När vi vet att f har ett största och ett minsta värde på M , kan vi sedan ange nödvändiga villkor på punkter i M , där dessa värden kan antas. Vi måste då skilja

på (1) inre punkter till M och (2) randpunkter till M (inklusive hörnpunkter). Möjliga inre punkter är stationära punkter för f och eventuella punkter där någon förstaderivata av f inte existerar. Möjliga randpunkter får vi genom att beskriva (delar av) randen i parameterform och studera f som funktion av parametern (parametrarna) eller genom att använda Lagranges multiplikator metod i avsnitt 4.3. Dessutom tillkommer eventuella hörnpunkter.

Slutligen kan vi jämföra värdena av f i de punkter som vi fått fram.

Anmärkning.

I vissa fall kan man bestämma de punkter, där en funktion f har största eller minsta värde av på en mängd M , med mer direkta metoder. Jfr exempel 4 i avsnitt 1.3.

I andra fall kan man genom något enkelt resonemang utesluta t.ex. inre punkter till M eller delar av randen av M , när man söker efter möjliga punkter, där f kan ha största eller minsta värde på M .

T.ex. är det uppenbart att på triangeln M med hörn i $(0,0)$, $(2,1)$ och $(1,3)$ har $f(x,y) = x^2y$ det minsta minsta värdet $f(0,0) = 0$, medan det största värdet måste antas i någon punkt på sträckan mellan $(2,1)$ och $(1,3)$. Ty M ligger i den positiva kvadranten (som ges av $x \geq 0$ och $y \geq 0$) och där är $f(x,y) \geq 0$. Vidare växer $f(x,y)$ då (x,y) rör sig ut från $(0,0)$ längs en godtycklig rät linje som skär M . Visa att det största värdet är $f\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right) = \frac{125}{27}$. $\square$

Problem, där man skall bestämma största och minsta värde av en reellvärd funktion på en delmängd av $\mathbf{R}^n$ med $n > 2$, kan behandlas på liknande sätt som i exempel 1. Men framför allt randundersökningen kan då bli mer komplicerad, eftersom t.ex. randen av en (någorlunda "snäll") mängd i $\mathbf{R}^3$ består av en eller flera ytor samt eventuella skärningslinjer och skärningspunkter mellan dem.

Exempel 2.

Vi skall bestämma största och minsta värdet av

$$f(x,y,z) = x^3 + x^2 - xy - yz + y + z$$

på den mängd M i $\mathbf{R}^3$ som ges av olikheterna

$$x + y + z \leq 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0 \quad \text{och} \quad z \geq 0$$

M är tetraedern med hörn i $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ och $(0,0,1)$ som i fig 2 och är en kompakt mängd i $\mathbf{R}^3$, ty den är begränsad och innehåller alla sina randpunkter (se nedan). f är en kontinuerlig funktion (på hela $\mathbf{R}^3$) och har därför ett största och ett minsta värde på den kompakta mängden M .

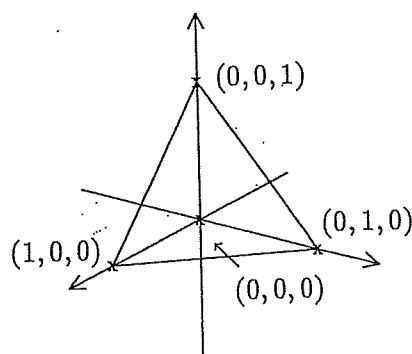


Fig 2

Vi skall nu bestämma möjliga punkter där dessa värden kan antas:

Inre punkter till M .

Möjliga inre punkter är stationära punkter för f , dvs. lösningar till systemet av ekvationer

$$f'_x(x, y, z) = 3x^2 + 2x - y = 0$$

$$f'_y(x, y, z) = -x - z + 1 = 0$$

$$f'_z(x, y, z) = -y + 1 = 0$$

Vi får lösningarna

$$(x, y, z) = \left(\frac{1}{3}, 1, \frac{2}{3}\right) \text{ och } (-1, 1, 2) \quad (\text{visa det!})$$

men ingen av dessa punkter ligger i M .

Möjliga punkter är också punkter, där f'_x , f'_y eller f'_z inte existerar, men sådana finns inte här.

Randpunkter till M .

Randen av M består av

(a) tetraederns fyra sidoytor, som ges av

(a1) $x = 0, y + z < 1, y > 0, z > 0$

(a2) $y = 0, x + z < 1, x > 0, z > 0$

(a3) $z = 0, x + y < 1, x > 0, y > 0$

(a4) $x + y + z = 1, x > 0, y > 0, z > 0$

(b) tetraederns sex kantlinjer, som ges av

(b1) $x = y = 0, 0 < z < 1$

(b4) $x + y = 1, z = 0, 0 < x < 1$

(b2) $x = z = 0, 0 < y < 1$

(b5) $x + z = 1, y = 0, 0 < x < 1$

(b3) $y = z = 0, 0 < x < 1$

(b6) $y + z = 1, x = 0, 0 < y < 1$

(c) tetraederns fyra hörnpunkter

$$(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0) \text{ och } (0, 0, 1)$$

(a1): Vi studerar då

$$f(0, y, z) = -yz + y + z$$

och söker stationära punkter till denna funktion av y och z , dvs. lösningar till systemet av ekvationer

$$f'_y(0, y, z) = -z + 1 = 0 \quad f'_z(0, y, z) = -y + 1 = 0$$

Det ger $y = z = 1$, men denna lösning uppfyller inte villkoret $y + z < 1$ i (a1).

(a2): Vi söker sedan stationära punkter till

$$f(x, 0, z) = x^3 + x^2 + z$$

som funktion av x och z men får då ingen lösning alls. Visa det!

(a3): Vi söker nu stationära punkter till

$$f(x, y, 0) = x^3 + x^2 - xy + y$$

som funktion av x och y och får då $x = 1$ och $y = 5$, som inte uppfyller villkoret $x + y < 1$ i (a3). Visa det!

(a4): Vi kan här lösa ut $z = 1 - x - y$ och studera

$$f(x, y, 1 - x - y) = x^3 + x^2 + y^2 - x - y + 1$$

med villkoren $x + y < 1$, $x > 0$ och $y > 0$. Vi skall då bestämma stationära punkter till denna funktion av x och y genom att lösa systemet

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y, 1 - x - y) = 3x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y, 1 - x - y) = 2y - 1 = 0$$

Det ger $(x, y) = \left(-1, \frac{1}{2}\right)$ eller $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$. Den förra lösningen uppfyller inte villkoret $x > 0$ men den senare duger och ger den möjliga punkten $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}\right)$.

Vi studerar sedan

$$(b1): f(0, 0, z) = z \quad \text{för } 0 < z < 1$$

$$(b2): f(0, y, 0) = y \quad \text{för } 0 < y < 1$$

$$(b3): f(x, 0, 0) = x^3 + x^2 \quad \text{för } 0 < x < 1$$

men får då inga möjliga punkter, som uppfyller villkoren, ty dessa funktioner av resp. z , y och x är strängt växande på de angivna (öppna) intervallen och kan därför inte anta något största eller minsta värde där.

(b4): Vi kan här lösa ut $y = 1 - x$ och studera

$$f(x, 1 - x, 0) = x^3 + 2x^2 - 2x + 1$$

som funktion av x för $0 < x < 1$ genom att söka lösningar till

$$\frac{d}{dx} f(x, 1 - x, 0) = 3x^2 + 4x - 2 = 0$$

Det ger $x = \frac{-2 \pm \sqrt{10}}{3}$, men med villkoret $0 < x < 1$ får vi bara den möjliga punkten $\left(\frac{-2 + \sqrt{10}}{3}, \frac{5 - \sqrt{10}}{3}, 0\right)$.

(b5): Vi löser ut $z = 1 - x$ och söker stationära punkter för

$$f(x, 0, 1 - x) = x^3 + x^2 - x + 1$$

som funktion av x för $0 < x < 1$. Det ger $x = \frac{1}{3}$ (och $x = -1 < 0$) och den möjliga punkten $(\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3})$.

(b6): Vi löser ut $z = 1 - y$ och söker stationära punkter för

$$f(0, y, 1 - y) = y^2 - y - 1$$

som funktion av y för $0 < y < 1$. Det ger $y = \frac{1}{2}$ och den möjliga punkten $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Dessutom är hörnpunkterna (c) möjliga punkter.

Slutligen jämför vi funktionsvärdena i de möjliga punkter, som vi har fått:

$$f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}\right) = \frac{61}{108} \quad f\left(\frac{-2 + \sqrt{10}}{3}, \frac{5 - \sqrt{10}}{3}, 0\right) = \frac{69 - 10\sqrt{10}}{27}$$

$$f\left(\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}\right) = \frac{22}{27} \quad f\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$$

$$f(0, 0, 0) = 0 \quad f(1, 0, 0) = 2 \quad f(0, 1, 0) = 1 \quad f(0, 0, 1) = 1$$

Vi ser då att f på M har

$$\text{största värdet } f(1, 0, 0) = 2 \quad \text{och} \quad \text{minsta värdet } f(0, 0, 0) = 0$$

Visa detta! Att $f(0, 0, 0) = 0$ är det minsta värdet följer också direkt av att

$$f(x, y, z) = x^3 + x^2 + y(1 - x - z) + z \geq 0 \quad \text{då } (x, y, z) \in M$$

ty då är $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ och $1 - x - z \geq 0$. $\square$

Vi skall nu se på några exempel där vi skall bestämma största och minsta värde (om de finns) av en funktion på en mängd som inte är kompakt. Vi kan då inte direkt använda satsen om existens av största och minsta värde, utan vi måste göra ett mer komplicerat resonemang för att (eventuellt) kunna visa att ett största eller minsta värde existerar.

Exempel 3.

Vi skall om möjligt bestämma största och minsta värdet av

$$f(x, y) = \frac{x^2 + xy + 1}{1 + y^2}$$

på den mängd M i $\mathbb{R}^2$ som ges av

$$-1 \leq x \leq 1$$

M är den lodräta strimman mellan linjerna $x = 1$ och $x = -1$ i fig 3. M är inte begränsad och alltså inte kompakt.

Däremot är den rektangel M_a som ges av

$$-1 \leq x \leq 1 \quad \text{och} \quad -a \leq y \leq a$$

en kompakt mängd i $\mathbb{R}^2$ för varje $a > 0$.

Den kontinuerliga funktionen f har då ett största och ett minsta värde på varje M_a , men dessa värden kan bero på a .

Men vi ser nu att ifall a väljs tillräckligt stort är det största och det minsta värdet av f på M_a också det största resp. minsta värde som $f(x, y)$ kan anta då (x, y) varierar över hela M . Detta beror på att $f(x, y)$ antar både positiva och negativa värden på M och att $f(x, y) \rightarrow 0$ då $y \rightarrow \pm\infty$ och $-1 \leq x \leq 1$.

Mer precist ser vi att för $-1 \leq x \leq 1$, dvs. $|x| \leq 1$, gäller att

$$|f(x, y)| = \frac{|x^2 + xy + y^2|}{1 + y^2} \leq \frac{|x|^2 + |x||y| + |y|^2}{1 + y^2} \leq \frac{2 + |y|}{1 + y^2}$$

där sista ledet går mot 0 då $|y| \rightarrow +\infty$. Detta medför att om a väljs tillräckligt stort och om (x, y) ligger i M men inte i M_a , dvs. $|x| \leq 1$ och $|y| \geq a$, så är värdet $f(x, y)$ så nära 0 att det är $<$ det största värdet och $>$ det minsta värdet av f på M_a . Dessa värden är då också det största resp. minsta värdet av f på hela M .

När vi nu vet att f har ett största och ett minsta värde på M , kan vi på samma sätt som tidigare bestämma möjliga punkter där dessa värden kan antas.

Inre punkter till M .

Vi söker lösningar till systemet av ekvationer

$$f'_x(x, y) = \frac{2x + y}{1 + y^2} = 0 \quad \text{och} \quad f'_y(x, y) = \frac{x - xy^2 - 2x^2y - 2y}{(1 + y^2)^2} = 0$$

och får den enda lösningen $(x, y) = (0, 0)$ (som ligger i M). Visa det!

Randpunkter till M .

Randen av M består av de två räta linjerna $x = 1$ och $x = -1$. Vi studerar därför

$$f(1, y) = \frac{2 + y}{1 + y^2} \quad \text{och} \quad f(-1, y) = \frac{2 - y}{1 + y^2}$$

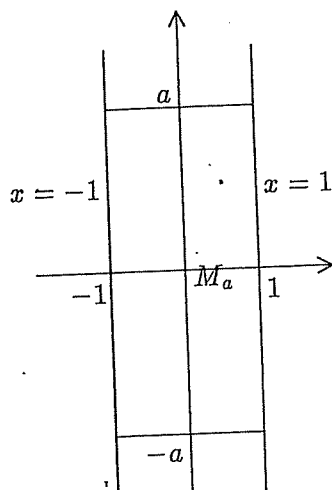


Fig 3

för alla reella y . Vi sätter då först

$$f'_y(1, y) = \frac{1 - y^2 - 4y}{(1 + y^2)^2} = 0$$

och får lösningarna $y = -2 \pm \sqrt{5}$ och de möjliga punkterna $(1, -2 + \sqrt{5})$ och $(1, -2 - \sqrt{5})$.

Motsvarande operation för $f(-1, y) = f(1, -y)$ ger $y = 2 \pm \sqrt{5}$ och de möjliga punkterna $(1, 2 + \sqrt{5})$ och $(1, 2 - \sqrt{5})$.

Det återstår att jämföra funktionsvärdena

$$f(0, 0) = 0$$

$$f(-2 + \sqrt{5}) = f(2 - \sqrt{5}) = \frac{\sqrt{5}}{10 - 4\sqrt{5}} = \frac{2 + \sqrt{5}}{2}$$

$$f(-2 - \sqrt{5}) = f(2 + \sqrt{5}) = \frac{-\sqrt{5}}{10 + 4\sqrt{5}} = \frac{2 - \sqrt{5}}{2}$$

och vi ser då att f på M har

$$\text{största värdet} \quad f(-2 + \sqrt{5}) = f(2 - \sqrt{5}) = \frac{2 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{och}$$

$$\text{minsta värdet} \quad f(-2 - \sqrt{5}) = f(2 + \sqrt{5}) = \frac{2 - \sqrt{5}}{2}$$

Alternativ metod.

Man kan ibland bestämma största och minsta värde för en funktion av flera variabler genom succesivt lösa motsvarande problem för en variabel.

I detta exempel observerar vi först att $f(-x, -y) = f(x, y)$ och därför räcker det att se på $y \geq 0$. Vi studerar nu $f(x, y)$ som funktion av x för $-1 \leq x \leq 1$ med fixt $y \geq 0$ genom att sätta

$$f'_x(x, y) = \frac{2x + y}{1 + y^2} = 0$$

vilket ger $x = -\frac{y}{2}$. Vi ser då genom teckenstudium av $f'_x(x, y)$ att för fixt $y \geq 0$ har $f(x, y)$, $-1 \leq x \leq 1$,

$$\text{största värdet} \quad f(1, y) = \frac{2 + y}{1 + y^2} \quad \text{och}$$

$$\text{minsta värdet} \quad \begin{cases} f(-\frac{y}{2}, y) = \frac{4 - y^2}{4(1 + y^2)} > 0 & \text{för } 0 \leq y < 2 \\ f(-1, y) = \frac{2 - y}{1 + y^2} \leq 0 & \text{för } y \geq 2 \end{cases}$$

Visa detta! Ett eventuellt största värde av $f(x, y)$ för $-1 \leq x \leq 1$ och $y \geq 0$ måste då också vara största värdet av $f(1, y)$ (som funktion av y), vilket vi kan bestämma genom teckenundersökning av

$$f'_y(1, y) = \frac{1 + y^2 - 4y}{(1 + y^2)^2}$$

Vidare ser vi att ett eventuellt minsta värde måste vara minsta värdet av $f(-1, y)$ för $y \geq 2$, vilket vi kan bestämma genom att se på

$$f'_y(-1, y) = \frac{-1 + y^2 - 4y}{(1 + y^2)^2}$$

Gör dessa undersökningar! De visar att $f(x, y)$ för $-1 \leq x \leq 1$ och $y \geq 0$ har

$$\text{största värdet } f(1, -2 + \sqrt{5}) = \frac{2 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\text{minsta värdet } f(-1, 2 + \sqrt{5}) = \frac{2 - \sqrt{5}}{2}$$

Av sambandet $f(-x, -y) = f(x, y)$ följer slutligen att dessa värden också antas i $(-1, 2 - \sqrt{5})$ resp. $(1, -2 - \sqrt{5})$.

Exempel 4.

Vi skall bestämma en rätvinklig låda med given volym V v.e. och sådan att sammanlagda arean av sidoytorna (inklusive ovan- och undersidan) blir så liten som möjligt.

Om lådans kantlängder är x , y och z l.e., är arean $A = 2xy + 2yz + 2xz$ a.e. och $V = xyz$. Vi löser ut $z = \frac{V}{xy}$ och arean ges då av funktionen

$$A = 2xy + \frac{2V}{x} + \frac{2V}{y}$$

där $x > 0$ och $y > 0$. Dessa olikheter ger en mängd M (den öppna första kvadranten i $\mathbb{R}^2$), som inte är vare sig sluten eller begränsad.

Däremot ger olikheterna

$$a \leq x \leq b \quad \text{och} \quad a \leq y \leq b$$

en kompakt mängd $M_{a,b}$ (kvadraten i fig 5) och A är kontinuerlig som funktion av (x, y) på $M_{a,b}$, ifall $0 < a < b$. A har därför ett minsta (och ett största) värde på varje sådan mängd $M_{a,b}$. Men nu kan vi välja a så litet och b så stort att A blir mycket stort för alla (x, y) , som ligger i M men utanför $M_{a,b}$, och då är det minsta värdet av A på $M_{a,b}$ också det minsta värdet av A på hela M .

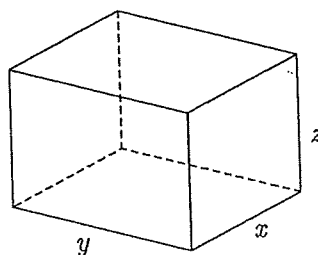


Fig 4

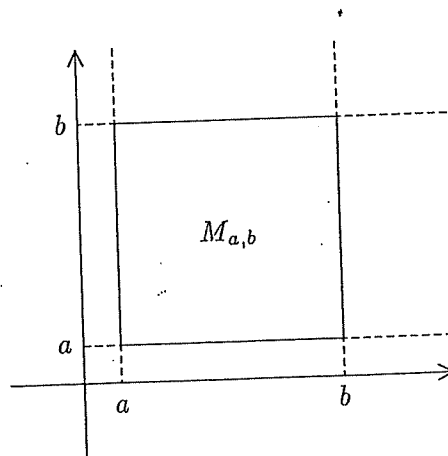


Fig 5

Mer precist ser vi att

$$A > \frac{2V}{a} \quad \text{då} \quad 0 < x < a \text{ och } y > 0 \quad \text{eller} \quad 0 < y < a \text{ och } x > 0$$

medan

$$A > 2ab \quad \text{då} \quad x > b \text{ och } y \geq a \quad \text{eller} \quad y > b \text{ och } x \geq a$$

och varje punkt (x, y) , som ligger i M men utanför $M_{a,b}$, uppfyller något av dessa villkor på x och y .

Vi kan nu först välja $a > 0$ så litet och sedan $b > a$ så stort att både $\frac{2V}{a}$ och $2ab$ blir större än t.ex. värdet $A(1,1)$ av A för $x = y = 1$. Då är $A > A(1,1)$ för alla (x, y) , som ligger i M men utanför $M_{a,b}$, och om dessutom $a \leq 1 \leq b$ medför det att det minsta värdet av A på $M_{a,b}$ också är det minsta värdet på hela M .

När vi nu vet att A har ett minsta värde på M , kan vi söka efter möjliga punkter där det kan antas.

M har bara inre punkter och om A har sitt minsta värde i en sådan punkt, måste den vara lösning till

$$\frac{\partial A}{\partial x} = 2y - \frac{2V}{x^2} = 0 \quad \text{och} \quad \frac{\partial A}{\partial y} = 2x - \frac{2V}{y^2} = 0$$

Enda lösningen är $x = y = \sqrt[3]{V}$ och den ger också $z = \frac{V}{xy} = \sqrt[3]{V}$. Den sammanlagda arean av lådans sidoytor blir alltså minst, då alla kantlinjerna är lika långa dvs. då lådan är en kub, vilket inte är överraskande. Då är arean

$$A = 6 \sqrt[3]{V} \cdot \sqrt[3]{V} = 6 V^{2/3}$$

Övningar 4.2:

1 Bestäm största och minsta värdet av

- | | | |
|-----|---------------------------------------|---|
| (a) | $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-x^2 - y^2}$ | då $x^2 + y^2 \leq 4$ |
| (b) | $f(x, y) = x^3 + xy$ | då $ x \leq 1$ och $ y \leq 1$ |
| (c) | $f(x, y) = xy - x - y$ | då $x \geq 0$, $y \geq 0$ och $x + y \leq 6$ |
| (d) | $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$ | då $x^2 + y^2 \leq 1$ och $y \geq 0$ |

2 Bestäm största och minsta värdet av

$$f(x, y) = x^2 - 2xy + 4y^2 - 2y$$

då (x, y) ligger på eller innanför triangeln med hörn i $(0, 0)$, $(1, 0)$ och $(0, 1)$.

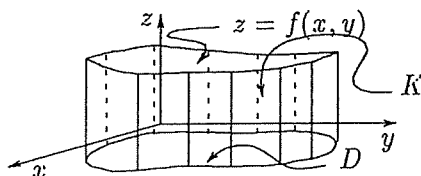
- 4.1: 8 (a) Ingetdera (b) Lokalt minimum
(Semidefinit kvadratisk form i Taylorutvecklingen. Jämför direkt med $f(0,0)$)
- 9 Lokalt minimum (Semidefinit kvadratisk form i Taylorutvecklingen.
Jämför $f(1+h, 2+k) = -2 + (2h-k)^2 + h^3k$ med $f(1,2) = -2$ för alla h och k med samma tecken och för h och k nära 0 då de har olika tecken.)
- 10 (a) Lok. min. i $(0,0)$ (b) Lok. max. i $(0,0)$
(c) Lok. min. i $(0,0,0)$
(Jämför direkt med $f(0,0)$ resp. $f(0,0,0)$)
- 4.2: 1 (a) $f(x,y) = e^{-1}$ för $x^2 + y^2 = 1$ störst, $f(0,0) = 0$ minst
($f(x,y) = te^{-t}$ med $t = x^2 + y^2$, $0 \leq t \leq 4$)
(b) $f(1,1) = 2$ störst, $f(-1,1) = -2$ minst
(c) $f(3,3) = 3$ störst, $f(6,0) = f(0,6) = -6$ minst
(d) $f(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{9}{4}$ störst, $f(\frac{1}{2}, 0) = -\frac{1}{4}$ minst
- 2 $f(0,1) = 2$ störst, $f(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = -\frac{1}{3}$ minst
- 3 $f(1,0,0) = f(0,1,0) = f(0,0,1) = 1$ störst, $f(0,0,0) = 0$ minst (trivialt)
(Största värdet antas då $x + y + z = 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ och $z \geq 0$)
- 4 $f(1,1,0) = f(1,0,1) = f(0,1,1) = 2$ störst, $f(0,0,0) = 0$ minst (trivialt)
- 5 (a) $f(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}) = \sqrt{\frac{5}{2e}}$ störst, $f(-\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{2}{\sqrt{10}}) = -\sqrt{\frac{5}{2e}}$ minst
(b) $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{e}}$ störst, $f(0,0) = 0$ minst (trivialt)
- 6 (a) $f(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{8}$ (b) $f(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$
(Villkor: $x + y + z = \pi$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ och $z \geq 0$, (med urartade fall))
- 7 (a) $f(2,b) = 4be^{-2b}$ störst om $0 < b < \frac{1}{2}$, $f(2, \frac{1}{2}) = \frac{2}{e}$ störst om $b \geq \frac{1}{2}$
 $f(x,0) = f(0,y) = 0$ minst (trivialt)
(b) $f(2, \frac{1}{2}) = \frac{2}{e}$ störst, $f(x,0) = f(0,y) = 0$ minst
(Följer av (a) med $b \geq \frac{1}{2}$)
- 8 $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{e}}$ störst, $f(0,0) = 0$ minst (trivialt)
(Studera t.ex. först $f(x,y)$ då $x + y = t$, $x \geq 0$ och $y \geq 0$ med fixt $t > 0$)

2 Multipelintegraler

Integration över två- och tredimensionella mängder har mycket stor betydelse i bl a fysikaliska och tekniska tillämpningar. Såpass skilda saker som totala laddningen hos en elektriskt laddad platta, volymen, tyngdpunkten och tröghetsmomentet hos en kropp kan samtliga beskrivas som integraler över två- eller tredimensionella mängder. I detta kapitel skall vi definiera vad som menas med dessa integraler. Vi skall även gå igenom metoder för att beräkna sådana integraler m h a upprepad integration.

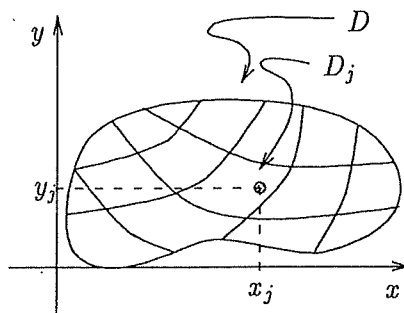
2.1 Dubbelintegraler

Låt D vara en mängd i xy -planet och antag att funktionen $f(x, y) \geq 0$ på D . Hur stor är volymen av den kropp som ges av mängden $K = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, 0 \leq z \leq f(x, y)\}$ dvs den kropp som har funktionsytan $z = f(x, y)$ som tak och xy -planet som golv (se figur 2.1 nedan) ?



Figur 2.1: Kroppen "under" en funktionsyta.

En naturlig idé är förstås att försöka härma resonemanget som fördes då vi införde enkelnintegralen. Dela in området D i delområden $D_1, D_2, \dots, D_n$ och välj i vart och ett av dessa en punkt $P_j = (x_j, y_j)$, se figur 2.2.



Figur 2.2: Indelning av D i delområden.

Om D_j är någorlunda litet och om $f(x, y)$ inte varierar alltför mycket bör volymen under den del av ytan $z = f(x, y)$ som stängs in av att $(x, y) \in D_j$ vara ungefär $f(x_j, y_j) \cdot m(D_j)$, där $m(D_j)$ betecknar arean av D_j . Den totala volymen bör alltså vara

$$V \approx \sum_{j=1}^n f(x_j, y_j) \cdot m(D_j).$$

Ju mindre delområden vi väljer, desto bättre bör approximationen bli. Vi skall nu genomföra den förmella definitionen och släpper direkt kravet att $f(x, y) \geq 0$. Alltså, låt D vara ett

begränsat område i xy -planet och låt f vara en begränsad funktion definierad på D . Dela in området D i n stycken delområden $D_1, D_2, \dots, D_n$. I varje delområde D_j väljer vi en punkt $P_j = (x_j, y_j)$ och bildar Riemannsumman¹

$$I_n = \sum_{j=1}^n f(P_j) \cdot m(D_j),$$

där $m(D_j)$ är arean av området D_j . Med *diametern* av D_j menar vi diametern av den minsta cirkel som kan omsluta D_j . Med *indelningens finhet* menas diametern av det delområde som har den största diametern. Vi gör följande definition.

Definition 2.1 Om $I_n \rightarrow I$, då *indelningens finhet går mot 0 och om detta gränsvärde är oberoende av hur de olika indelningarna görs och hur P_j väljs, säger vi att dubbelintegralen av f över D existerar och har värdet I . Vi skriver*

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy$$

Man inser på en gång att det är alldeles ohanterligt att räkna ut dubbelintegralen över ett område m.h.a. integralens definition. Man skall ju titta på *alla* indelningar, vilket i sig är en omöjlighet. Lyckligtvis slipper man ifrån detta problem, vilket följande sats visar.

Sats 2.2 Om f är kontinuerlig på ett slutet och begränsat område D så existerar dubbelintegralen $\iint_D f(x, y) dx dy$.

Satsen kräver egentligen att f är kontinuerlig på D , men om D kan delas in i ändligt många delområden $D_1, D_2, \dots, D_n$ så att f är begränsad på varje delområde D_j och kontinuerlig i det inre av varje D_j , gäller satsen ändå. Det gör alltså inget om f gör språng längs ändligt många kurvor (på samma sätt som det i envariabelfallet inte gör något om funktionen gör språng i ändligt många punkter).

Beviset av satsen tar vi ej upp här, den intresserade kan titta i t ex [12]. Beviset har dock uppenbara likheter med envariabelfallet. Vi gör nu följande definition

Definition 2.3 Låt $f(x, y) \geq 0$ vara begränsad då (x, y) tillhör det slutna och begränsade området D . Då definierar vi volymen av den kropp som ges av $(x, y) \in D, 0 \leq z \leq f(x, y)$ som

$$V = \iint_D f(x, y) dx dy$$

om integralen existerar.

¹Riemann, Georg Friedrich Bernhard (1826-1866). Tysk matematiker. En av den moderna matematikens pionjärer. Arbetade med analytiska funktioner, teori för integraler, potentialteori, icke-euklidisk geometri och teori för primtal.

Vi bör förstås övertyga oss om att definitionen är vettig. För enkelhets skull antar vi att f är kontinuerlig på D . Låt oss betrakta en indelning av D i delmängder $D_1, D_2, \dots, D_n$. På varje delområde D_j väljer vi $P_j = (x_j, y_j)$ så att $f(x_j, y_j)$ är det största värdet för f på D_j (det är här vi använder antagandet att f är kontinuerlig). Då blir $I_n = \sum_{j=1}^n f(P_j) \cdot m(D_j)$ summan av volymen av ett antal rätblock, vars tak ligger ovanför f . Väljer vi å andra sidan ut punkterna $Q_j = (x_j, y_j)$ så att $f(x_j, y_j)$ är det minsta värdet för f på D_j så blir $J_n = \sum_{j=1}^n f(Q_j) \cdot m(D_j)$ summan av volymen av ett antal rätblock vars tak ligger under f . Volymen under f måste alltså uppfylla olikheterna

$$J_n \leq V \leq I_n.$$

Låter vi nu finheten gå mot 0, vet vi enligt förutsättningarna att såväl I_n som J_n närmar sig $\iint_D f(x, y) dx dy$. Kroppen ligger således instängd mellan två områden vars volymer kan komma godtyckligt nära $\iint_D f(x, y) dx dy$. Det är därför vettigt att definiera volymen som $V = \iint_D f(x, y) dx dy$.

Exempel 2.4 Hur stor är arean av ett område D i xy -planet?

Lösning: Betrakta den kropp som har höjden 1 och bottenytan D . Då är kroppens volym

$$V = \iint_D 1 dx dy.$$

Å andra sidan är förstås volymen=höjden·basarean, dvs $V = 1 \cdot m(D)$, och kombinerar vi ihop dessa får vi att

$$m(D) = \iint_D dx dy.$$

□

2.1.1 Räkneregler

Under förutsättning att funktionerna f och g är såpass hyggliga att integralerna existerar så gäller att

$$\iint_D (f(x, y) + g(x, y)) dx dy = \iint_D f(x, y) dx dy + \iint_D g(x, y) dx dy \quad (2.1)$$

$$\iint_D c \cdot f(x, y) dx dy = c \cdot \iint_D f(x, y) dx dy \quad (2.2)$$

om c är en konstant.

Om $f(x, y) \geq g(x, y)$ för alla $(x, y) \in D$ så är

$$\iint_D f(x, y) dx dy \geq \iint_D g(x, y) dx dy . \quad (2.3)$$

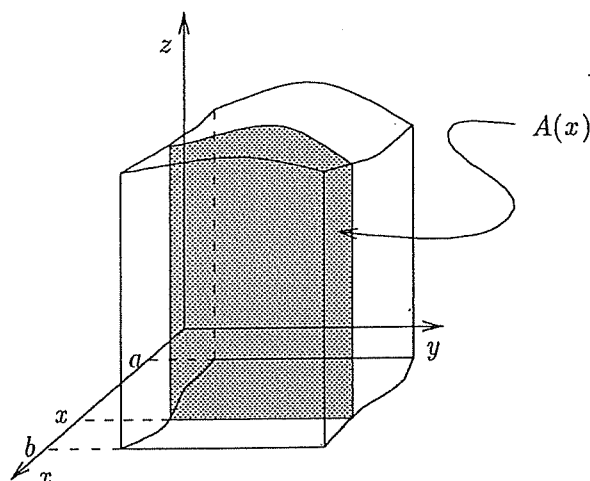
Om området D delas upp i två delområden D_1 och D_2 så gäller att

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy \quad (2.4)$$

Räknereglerna är mycket naturliga och bevisen av dem är ganska enkla. Vi avstår dock från att visa dem här. Den hågade läsaren kan själv försöka bevisa någon av dem eller studera beviset i tex [7] eller [12] .

2.1.2 Beräkning av dubbelintegraler med upprepad integration

Vi kommer nu att använda samma idéer som ligger bakom den så kallade *skivformeln*, se [11]. Antag att vi för varje x känner arean $A(x)$ för ett plant snitt genom kroppen, vinkelrätt mot x -axeln, se fig 2.3.



Figur 2.3: Plant snitt för volymsberäkning med skivformeln.

Antag att kroppen K är instängd mellan planen $x = a$ och $x = b$. Då har K volymen

$$V = \int_a^b A(x) dx .$$

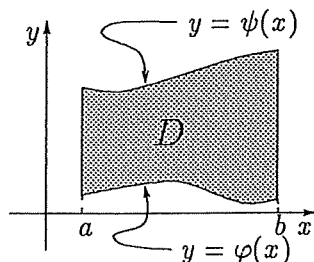
En volym kan alltså beräknas på två sätt, dels som en dubbelintegral, dels med skivformeln. Vi kombinerar dessa och visar följande sats.

Sats 2.5 Låt D vara det område i xy -planet som beskrivs av att

$$a \leq x \leq b \quad , \quad \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)$$

och antag att f är kontinuerlig på D (se fig 2.4) . Då är

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \right) dx .$$

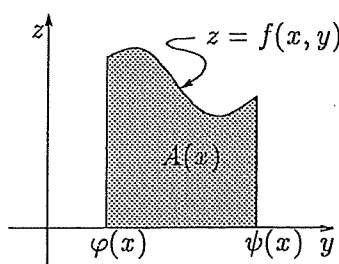


Figur 2.4: Beräkning av integraler med upprepad integration.

Bevis Antag först att $f(x, y) \geq 0$ i D , så att vi kan tolka dubbelintegralen som en volym. Då är alltså

$$\iint_D f(x, y) dx dy = V = \int_a^b A(x) dx$$

där $A(x)$ är arean av skärningen mellan kroppen och planet genom $(x, 0, 0)$, vinkelrätt mot x -axeln (se figur 2.5) .



Figur 2.5: Tvärsnittsarean för fixt x .

Vi ser att $A(x)$ kan beräknas som en vanlig enkelintegral,

$$A(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy$$

varpå följer att

$$\iint_D f(x, y) dx dy = V = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

så satsen är bevisad i fallet $f(x, y) \geq 0$. Om $f(x, y) \leq 0$ i D studerar vi i stället $g(x, y) = -f(x, y) \geq 0$ och om $f(x, y)$ har varierande tecken delar vi upp D i delområden $D_1, D_2, \dots, D_n$ så att f har konstant tecken på varje delområde. Därefter genomför vi samma resonemang som ovan samt använder räknelagarna 2.1, 2.2 och 2.4 så följer satsen i sin allmänna tappning. $\square$

Anm. 2.6 Om D är det område som beskrivs av olikheterna

$$c \leq y \leq d, \quad g(y) \leq x \leq h(y)$$

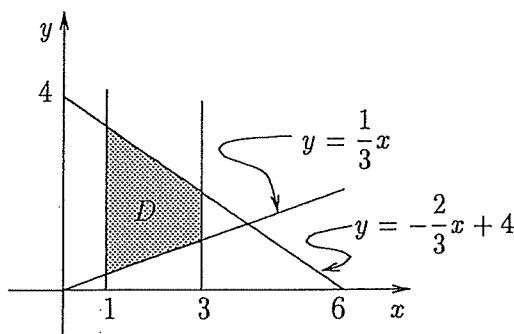
kan man på motsvarande sätt visa att

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_{g(y)}^{h(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

Exempel 2.7 Beräkna $\iint_D (3x + 18y) dx dy$, där D är det område som begränsas

av linjerna $x = 1$, $x = 3$ och linjerna $y = -\frac{2}{3}x + 4$, $y = \frac{1}{3}x$.

Lösning: Vi ritar upp området D först.



Figur 2.6: Integrationsområdet som begränsas av linjerna ovan.

Med de beteckningar vi använt i sats 2.5 får vi

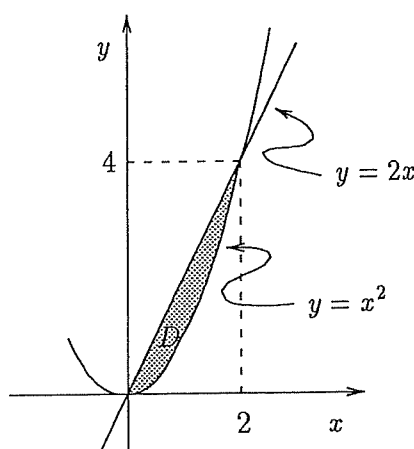
$$A(x) = \int_{\frac{1}{3}x}^{-\frac{2}{3}x+4} (3x + 18y) dy = \left[3xy + 9y^2 \right]_{y=\frac{1}{3}x}^{y=-\frac{2}{3}x+4} = 144 - 36x$$

vilket slutligen ger

$$\iint_D (3x + 18y) dx dy = \int_1^3 (144 - 36x) dx = \left[144x - 18x^2 \right]_1^3 = 144.$$

□

Exempel 2.8 Beräkna $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$, då D är det område i xy -planet som ges av att $x^2 \leq y \leq 2x$.



Figur 2.7: Området $D = \{(x, y) : x^2 \leq y \leq 2x\}$.

Lösning: Ur figur 2.7 ser vi att området D ges av olikheterna

$$0 \leq x \leq 2, \quad x^2 \leq y \leq 2x.$$

Sålunda blir

$$\begin{aligned} \iint_D (x^2 + y^2) dx dy &= \int_0^2 \left(\int_{x^2}^{2x} (x^2 + y^2) dy \right) dx = \\ &= \int_0^2 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_{y=x^2}^{y=2x} dx = \\ &= \int_0^2 \left(\frac{14}{3} x^3 - x^4 - \frac{1}{3} x^6 \right) dx = \\ &= \left[\frac{7}{6} x^4 - \frac{1}{5} x^5 - \frac{1}{21} x^7 \right]_0^2 = \frac{216}{35} \end{aligned}$$

Alternativ lösning: Området kan även beskrivas som

$$0 \leq y \leq 4, \quad \frac{y}{2} \leq x \leq \sqrt{y}$$

så

$$\begin{aligned} \iint_D (x^2 + y^2) dx dy &= \int_0^4 \left(\int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} (x^2 + y^2) dx \right) dy = \\ &= \int_0^4 \left[\frac{x^3}{3} + xy^2 \right]_{x=\frac{y}{2}}^{x=\sqrt{y}} dy = \\ &= \int_0^4 \left(\frac{1}{3}y^{3/2} + y^{5/2} - \frac{13}{24}y^3 \right) dy = \\ &= \left[\frac{2}{15}y^{5/2} + \frac{2}{7}y^{7/2} - \frac{13}{96}y^4 \right]_0^4 = \frac{216}{35} \end{aligned}$$

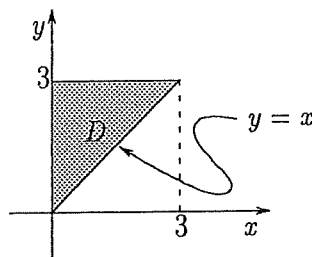
□

Exempel 2.9 Beräkna $\int_0^3 \left(\int_x^3 e^{-y^2} dy \right) dx$.

Lösning: Vi kan inte beräkna integralerna som de står, eftersom vi inte klarar av att finna en primitiv funktion till e^{-y^2} . Nu är dock, enligt sats 2.5,

$$\int_0^3 \left(\int_x^3 e^{-y^2} dy \right) dx = \iint_D e^{-y^2} dx dy,$$

där D är området i figur 2.8.



Figur 2.8: Området $0 \leq x \leq 3$, $x \leq y \leq 3$.

Detta område kan även beskrivas som

$$0 \leq y \leq 3, \quad 0 \leq x \leq y.$$

Av detta följer så att

$$\begin{aligned} \int_0^3 \left(\int_x^3 e^{-y^2} dy \right) dx &= \iint_D e^{-y^2} dx dy = \int_0^3 \left(\int_0^y e^{-y^2} dx \right) dy = \\ &= \int_0^3 \left[x e^{-y^2} \right]_0^y dy = \int_0^3 y e^{-y^2} dy = \left[-\frac{1}{2} e^{-y^2} \right]_0^3 = \frac{1 - e^{-9}}{2} \end{aligned}$$

□

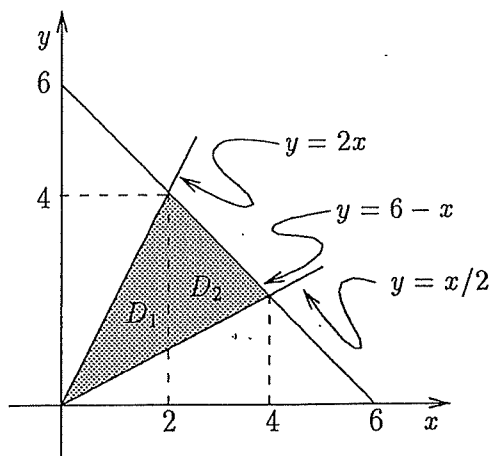
I exemplet ovan gjorde vi en omkastning av integrationsordningen för att kunna beräkna integralens värde. Detta är något man bör tänka på då man skall beräkna dubbelintegraler. Det kan hända att det är mycket lättare att integrera först m.p. x i stället för att börja med att integrera m.p. y . I exemplet ovan var det tomt omöjligt att utföra integrationen i den andra ordningen. Några allmängiltiga råd för när man skall integrera först m.p. x är förstås omöjliga att ge, man får prova sig fram.

Ibland är det lämpligt att dela upp integrationsområdet innan man utför integrationen. Nästa exempel illustrerar en sådan situation.

Exempel 2.10 Beräkna $\iint_D x^2 dx dy$, då D är triangelskivan med hörn i punkterna $(0,0)$, $(4,2)$ och $(2,4)$.

Lösning: Vi delar området D enligt figur 2.9 och får då

$$I = \iint_D x^2 dx dy = \iint_{D_1} x^2 dx dy + \iint_{D_2} x^2 dx dy.$$



Figur 2.9: Området D delas i två delområden innan integrationen

Så räknar vi ut triangelsidornas ekvationer och får fram integrationsgränserna:

$$D_1: 0 \leq x \leq 2, \quad \frac{x}{2} \leq y \leq 2x \quad D_2: 2 \leq x \leq 4, \quad \frac{x}{2} \leq y \leq 6-x.$$

Detta ger slutligen

$$\begin{aligned} \iint_{D_1} x^2 dx dy &= \int_0^2 \left(\int_{x/2}^{2x} x^2 dy \right) dx = \int_0^2 [x^2 y]_{x/2}^{2x} dx = \\ &= \int_0^2 \frac{3}{2} x^3 dx = \left[\frac{3}{8} x^4 \right]_0^2 = 6 \end{aligned}$$

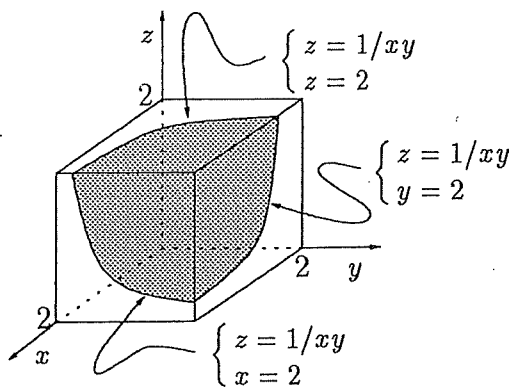
$$\begin{aligned} \iint_{D_2} x^2 dx dy &= \int_2^4 \left(\int_{x/2}^{6-x} x^2 dy \right) dx = \int_2^4 [x^2 y]_{x/2}^{6-x} dx = \\ &= \int_2^4 \left(6x^2 - \frac{3}{2} x^3 \right) dx = \left[2x^3 - \frac{3}{8} x^4 \right]_2^4 = 22 \end{aligned}$$

$$\text{dvs } \iint_D x^2 dx dy = 28 .$$

□

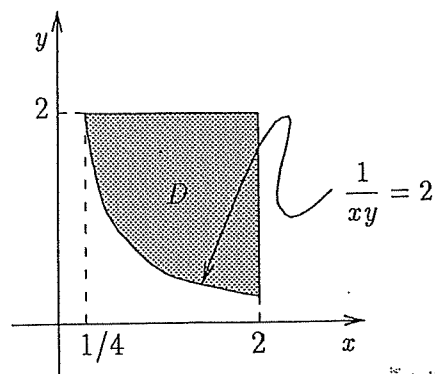
Exempel 2.11 En kub med sidan 2 längdenheter ligger med ett hörn i origo och tre kanter längs de positiva koordinataxlarna. Kuben delas i två stycken av ytan $z = \frac{1}{xy}$. Beräkna volymen av de båda delarna.

Lösning: Vi börjar med att rita en figur över kuben och funktionsytan.



Figur 2.10: Kub som delas av funktionsytan $z = \frac{1}{xy}$.

Den mindre, skuggade delen har planet $z = 2$ som tak och funktionsytan $z = \frac{1}{xy}$ som golv. Integrationsområdet är utritat i figur 2.11.



Figur 2.11: Integrationsområdet för den mindre delen.

Volymen av den mindre delen blir således

$$\begin{aligned}
 V_1 &= \iint_D \left(2 - \frac{1}{xy}\right) dx dy = \int_{1/4}^2 \int_{1/2x}^2 \left(2 - \frac{1}{xy}\right) dy dx = \\
 &= \int_{1/4}^2 \left[2y - \frac{\ln |y|}{x}\right]_{1/2x}^2 dx = \int_{1/4}^2 \left(4 - \frac{1 + \ln 2}{x} - \frac{\ln 2x}{x}\right) dx = \\
 &= \left[4x - (1 + \ln 2) \ln |x| - \frac{(\ln 2x)^2}{2}\right]_{1/4}^2 = 7 - 3 \ln 2 - \frac{9}{2}(\ln 2)^2.
 \end{aligned}$$

Volymen av den större delen blir slutligen

$$V_2 = V_{kub} - V_1 = 1 + 3 \ln 2 + \frac{9}{2}(\ln 2)^2.$$

□

2.2 Trippelintegraler

I detta avsnitt skall vi kortfattat behandla trippelintegraler. Definitionen är helt analog med motsvarande för dubbelintegraler. Låt Ω vara ett begränsat område i rummet och låt $f(x, y, z)$ vara en given begränsad funktion på Ω . Dela in området Ω i delområden Ω_j , med volym $m(\Omega_j)$. Välj vidare en punkt P_j i vare delområde D_j och bilda riemannsumman

$$I_n = \sum_{j=1}^n f(P_j) m(\Omega_j).$$

Definition 2.12 Om gränsvärdet för I_n existerar och har samma värde I då indelningens finhet går mot 0, oberoende av hur Ω_j och P_j väljs, säger vi att trippelintegralen av f över Ω existerar och har värde I . Vi skriver

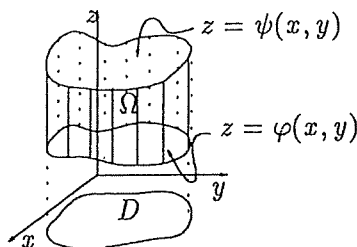
$$I = \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz.$$

Om f är kontinuerlig på ett slutet och begränsat område Ω så kan man visa att trippelintegralen $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$ existerar, helt i analogi med motsvarande sats för dubbelintegraler. Motsvarigheten till räknelagarna 2.1–2.4 gäller också, med de naturliga modifieringarna. Någon direkt geometrisk tolkning av trippelintegralen finns inte. Däremot finns det andra naturliga tolkningar. Om $f(x, y, z) \geq 0$ tolkas som densiteten i punkten (x, y, z) så blir $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$ den totala massan hos kroppen Ω .

För att beräkna trippelintegraler använder vi följande sats.

Sats 2.13 Antag att $\varphi(x, y)$ och $\psi(x, y)$ är kontinuerliga funktioner på ett område D i xy -planet. Om funktionen $f(x, y, z)$ är kontinuerlig på området Ω , där $\Omega = \{(x, y, z) : \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y), (x, y) \in D\}$ (se figur 2.12) så gäller

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D \left(\int_{\varphi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy.$$



Figur 2.12: Områdena Ω och D i satsen ovan.

Området D är projektionen av Ω i xy -planet. Beräkningen reduceras alltså till beräkning av en enkelintegral och en dubbelintegral.

Exempel 2.14 Uttryck volymen av ett område Ω i rummet med hjälp av en trippelintegral.

Lösning: Om densiteten hos kroppen är 1 (massenhet/volymsenhet) så är volymen och massan hos kroppen lika till sitt mätetal, dvs

$$V = \iiint_{\Omega} dx \, dy \, dz .$$

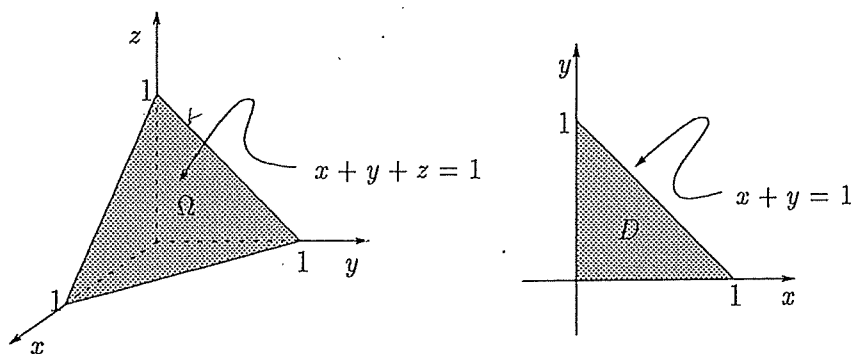
□

Exempel 2.15 Beräkna $\iiint_{\Omega} e^{x+y+z} dx \, dy \, dz$, där Ω är det område i rummet som definieras av att $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, $x + y + z \leq 1$.

Lösning: Området Ω kan skrivas

$$\Omega = \{(x, y, z) : 0 \leq z \leq 1 - x - y, (x, y) \in D\} ,$$

där D utgörs av det begränsade område i xy -planet som begränsas av linjerna $x = 0$, $y = 0$ samt $x + y = 1$ (den sistnämnda är skärningen mellan xy -planet och planet $x + y + z = 1$), se figur 2.13.



Figur 2.13: Områdena Ω och D .

Enligt sats 2.13 är nu

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{\Omega} e^{x+y+z} dx \, dy \, dz = \iint_D \int_0^{1-x-y} e^{x+y+z} dz \, dx \, dy = \\ &= \iint_D (e - e^{x+y}) dx \, dy = \int_0^1 \int_0^{1-x} (e - e^{x+y}) dy \, dx = \\ &= \int_0^1 (e^x - ex) dx = \frac{e}{2} - 1 . \end{aligned}$$

□

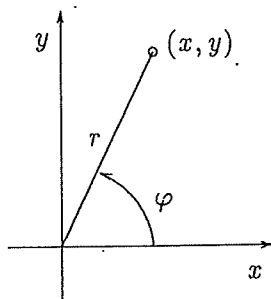
2.3 Variabelbyte i multipelintegraler

När vi tidigare studerade enkelintegraler, var variabelbyte ett centralt hjälpmedel. Via något lämpligt variabelbyte överfördes integranden till en ny integrand, vars primitiva funktioner var enklare att finna. Motsvarande problem inställer sig förstås även då vi studerar multipelintegraler. En liten skillnad blir nu den att variabelbyten inte enbart påverkar integranden, utan också integrationsområdets utseende. I enkelintegralsfallet ändrades förvisso också integrationsområdet men det blev då bara ett nytt intervall i stället för det gamla intervallet. När det gäller multipelintegraler kommer integrationsområdena att bli väsentligen annorlunda vid variabelbyten. Detta skall vi försöka utnyttja till vår fördel. I många problem är det naturligt att använda andra koordinatsystem än det vanliga kartesiska. Vi skall här främst studera integraler över områden som har cirkulär eller sfärisk symmetri. Vi börjar med att införa en koordinatoberoende beteckning för dubbel- och trippelintegraler, nämligen $\iint_D f dA$ resp $\iiint_\Omega f dV$. Symbolerna dA och dV brukar kallas *areaelement* resp *volymselement*.

2.3.1 Polära koordinater

En punkt i planet har vi tidigare beskrivit med punkten x - och y -koordinater i ett vanligt rätvinkligt koordinatsystem. Inför vi nu vinkeln φ som vinkeln mellan positiva x -axeln och strålen från origo till punkten (x, y) , samt talet r som avståndet från origo till (x, y) , se figur 2.14, får vi sambandet

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$$



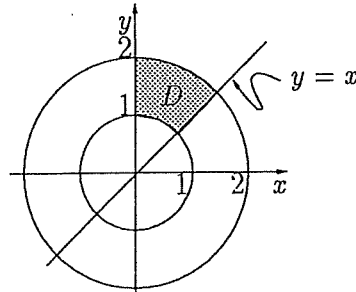
Figur 2.14: Polära koordinater.

Eftersom r är ett avstånd blir automatiskt $r \geq 0$. Vidare ser vi att om vi ökar vinkeln φ med 2π kommer vi tillbaka till samma punkt som vi startade med. Det räcker alltså att låta $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ (egentligen räcker det med $0 \leq \varphi < 2\pi$, men det kommer inte att spela någon roll vid integrationen).

Anledningen till att de polära koordinaterna är användbara är att vi ofta sysslar med funktioner eller områden som har "cirkulär symmetri". Koöordinaterna (r, φ) kallas *polära koordinater*.

Exempel 2.16 Beskriv med hjälp av polära koordinater det område i övre halvplanet som begränsas av cirklarna $x^2 + y^2 = 1$ och $x^2 + y^2 = 4$ samt linjerna $x = 0$ och $x = y$.

Lösning: Sätter vi in $x = r \cos \varphi$ och $y = r \sin \varphi$ i ekvationerna för cirkelarna och linjerna får vi i tur och ordning $r = 1$, $r = 2$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ resp $\varphi = \frac{\pi}{4}$ så området består alltså av de punkter som uppfyller $1 \leq r \leq 2$, $\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, se figur 2.15.



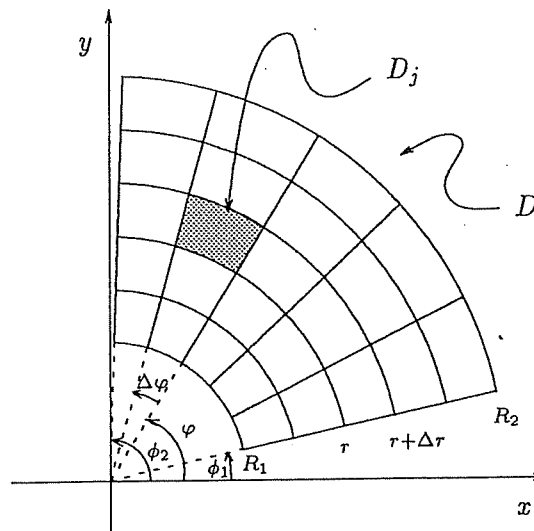
Figur 2.15: Området $1 \leq r \leq 2$, $\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

□

Antag nu att vi vill integrera den kontinuerliga funktionen f över ett område D , som ges av att $R_1 \leq r \leq R_2$, $\phi_1 \leq \varphi \leq \phi_2$. Vi vet att om vi bildar riemannsumman $\sum_{j=1}^n f(P_j)m(D_j)$ där $\{D_j\}_{j=1}^n$ är en indelning av D och där $P_j = (r_j, \varphi_j)$ är en punkt i D_j , så gäller att

$$\sum_{j=1}^n f(P_j)m(D_j) \rightarrow \iint_D f dA$$

då indelningens finhet går mot 0. Vi väljer nu att göra indelningen på det sätt som visas i figur 2.16.



Figur 2.16: Indelning av ett område i cirkelsegment.

Arean av delområde D_j är

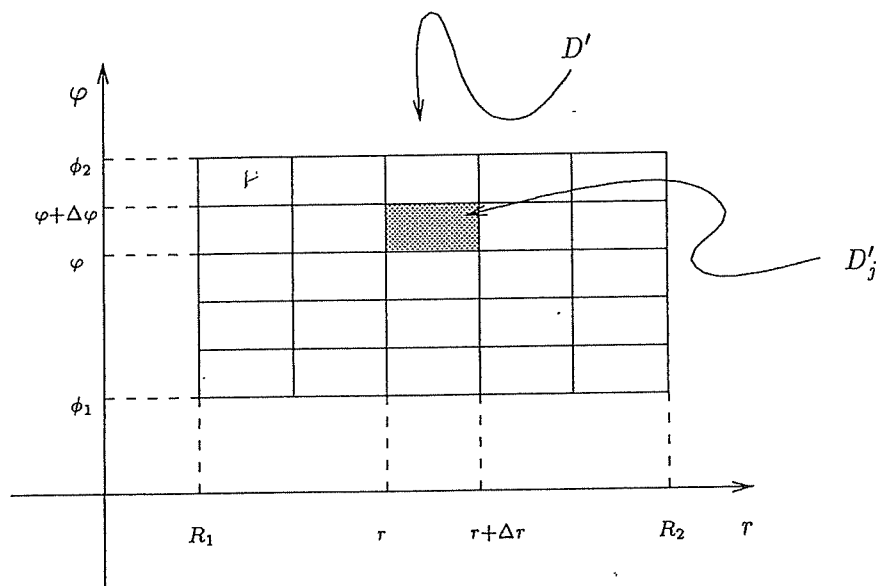
$$\begin{aligned} m(D_j) &= \frac{1}{2}(r + \Delta r)^2 \Delta\varphi - \frac{1}{2}r^2 \Delta\varphi = \\ &= r\Delta r\Delta\varphi + \frac{1}{2}(\Delta r)^2 \Delta\varphi = \left(r + \frac{1}{2}\Delta r\right) \Delta r \Delta\varphi. \end{aligned}$$

Om vi sätter $r_j = r + \frac{1}{2}\Delta r$ får vi $m(D_j) = r_j \Delta r \Delta\varphi$. Väljer vi sedan ett godtyckligt φ_j så att $(r_j, \varphi_j) \in D_j$ så kan riemannsumman skrivas

$$\sum_{j=1}^n f(P_j) m(D_j) = \sum_{j=1}^n f(P_j) r_j \Delta r \Delta\varphi. \quad (2.5)$$

Sedan skall vi försöka tolka summan i högerledet. Vi tänker oss ett $r\varphi$ -plan, där r och φ är koordinater i ett rätvinkligt system.

Det ursprungliga området D beskrivs av olikheterna $R_1 \leq r \leq R_2$, $\phi_1 \leq \varphi \leq \phi_2$. Dessa olikheter beskriver en rektangel, D' i $r\varphi$ -planet, se figur 2.17.



Figur 2.17: Området D' i $r\varphi$ -planet.

Vi ser också att varje delområde D_j motsvaras av ett rektangulärt delområde D'_j med kantlängder Δr och $\Delta\varphi$ i $r\varphi$ -planet. Tydligt är alltså högerledet i ekvation 2.5 en riemannsumma för $f \cdot r$ över området D' . Av detta följer slutligen att då indelningens finhet går mot 0 kommer denna riemannsumma att konvergera mot

$$\iint_{D'} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi.$$

Denna dubbelintegral kan som vanligt beräknas med upprepad integration. Vi har därmed visat följande sats.

Sats 2.17 Antag att $f(x, y)$ är en kontinuerlig funktion. Låt vidare D vara det område i xy -planet som ges av att

$$\phi_1 \leq \varphi \leq \phi_2 \quad , \quad R_1 \leq r \leq R_2 \quad .$$

Då gäller

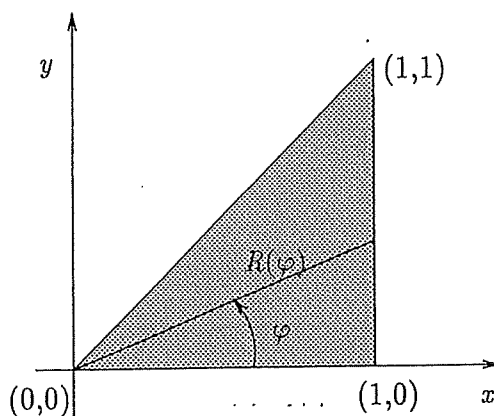
$$\begin{aligned} \iint_D f \, dA &= \iint_{D'} f \cdot r \, dr \, d\varphi = \\ &= \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{R_1}^{R_2} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r \, dr \, d\varphi = \\ &= \int_{R_1}^{R_2} \int_{\phi_1}^{\phi_2} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r \, d\varphi \, dr \quad . \end{aligned}$$

Observera att det dyker upp ett r vid övergången till polära koordinater. För areaelementet gäller formellt att

$$dA = dx \, dy = r \, dr \, d\varphi \quad .$$

Exempel 2.18 Låt D vara triangeln med hörn i punkterna $(0,0)$, $(1,0)$ och $(1,1)$. Beskriv D m h a polära koordinater.

Lösning: Vi ser direkt att φ skall uppfylla olikheterna $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$ och att r skall variera mellan 0 och ett värde $R(\varphi)$ som bestäms av linjen genom $(1,0)$ och $(1,1)$, se figur 2.18.



Figur 2.18: Triangeln med hörn i $(0,0)$, $(1,0)$ och $(1,1)$.

Linjen genom $(1,0)$ och $(1,1)$ har ekvationen $x = 1$ och sätter vi in $x = r \cos \varphi$ får vi att $r = \frac{1}{\cos \varphi}$. Triangeln beskrivs alltså av olikheterna

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} \quad , \quad 0 \leq r \leq \frac{1}{\cos \varphi} \quad .$$

□

I exemplet ovan såg vi att r inte varierade mellan två konstanta gränser. Vill vi integrera en funktion över detta område är alltså inte sats 2.17 tillämplig. Däremot gäller följande modifiering av denna sats.

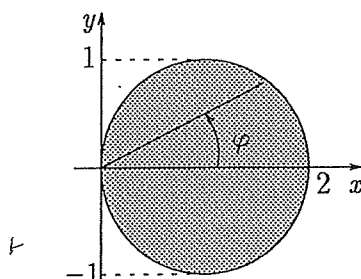
Sats 2.19 Låt D vara det område i xy -planet, som i polära koordinater definieras av $\phi_1 \leq \varphi \leq \phi_2$, $R_1(\varphi) \leq r \leq R_2(\varphi)$. Då gäller

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{R_1(\varphi)}^{R_2(\varphi)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi.$$

Exempel 2.20 Beräkna $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, där D är cirkelskivan

$$(x - 1)^2 + y^2 \leq 1.$$

Lösning:



Figur 2.19: Cirkelskivan $(x - 1)^2 + y^2 \leq 1$.

I polära koordinater blir cirkelns ekvation

$$(r \cos \varphi - 1)^2 + (r \sin \varphi)^2 = 1$$

som efter förenkling blir $r = 2 \cos \varphi$. Ur figuren ser vi sålunda att området beskrivs av att

$$-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq r \leq 2 \cos \varphi.$$

Av sats 2.19 följer då att

$$\begin{aligned} \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dA &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2 \cos \varphi} r \cdot r dr d\varphi = \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^{2 \cos \varphi} d\varphi = \frac{8}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \varphi d\varphi = \\ &= \frac{8}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 \varphi) \cos \varphi d\varphi = \frac{8}{3} \left[\sin \varphi - \frac{\sin^3 \varphi}{3} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{32}{9}. \end{aligned}$$

□

Anm. 2.21 Om integrationsområdet är en cirkelskiva (eller en del av en sådan) med medelpunkt i (x_0, y_0) så kan det ibland vara lämpligt att införa polära koordinater runt medelpunkten (i stället för runt origo), d v s

$$\begin{cases} x - x_0 = r \cos \varphi \\ y - y_0 = r \sin \varphi \end{cases}$$

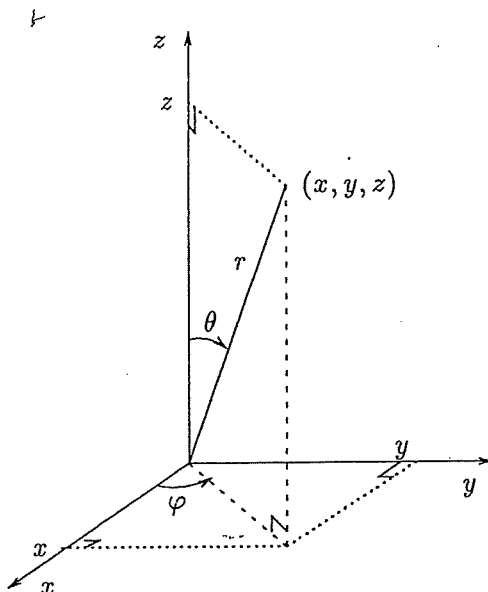
Även i detta fall blir $dA = r dr d\varphi$. Använder vi detta variabelbyte i exempel 2.20 får vi

$$\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{1 + r^2 + 2r \cos \varphi} \cdot r dr d\varphi.$$

Den integralen klarar vi dock ej av att räkna ut, så med denna integrand blir inte detta något bra variabelbyte.

2.3.2 Sfäriska koordinater

Vi har i föregående avsnitt sett att en punkt i planet kan beskrivas m h a avståndet till origo samt en vinkel (vinkeln med positiva x -axeln). Vill vi göra en motsvarighet till detta, när vi tittar på punkter i rummet, behöver vi en vinkel till. Med *sfäriska koordinater* beskrivs en punkts läge av r , θ och φ enligt figur 2.20.



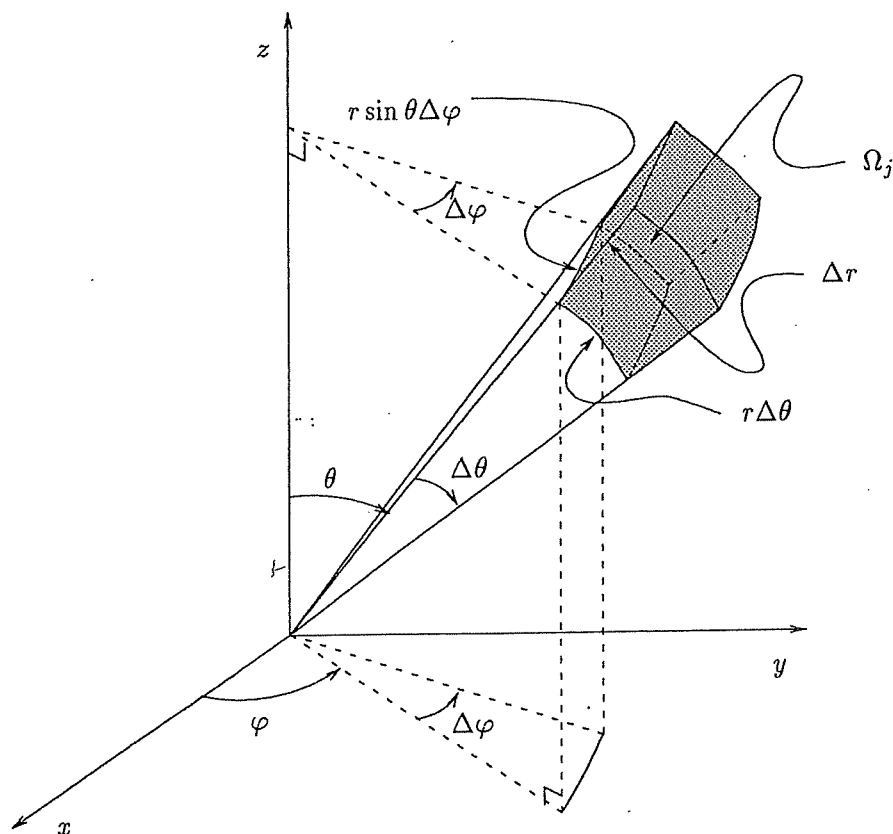
Figur 2.20: Sfäriska koordinater.

Ur figuren får vi direkt fram följande koordinatsamband:

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi & , \quad r \geq 0 \\ y = r \sin \theta \sin \varphi & , \quad 0 \leq \theta \leq \pi \\ z = r \cos \theta & , \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$$

Låt Ω vara ett område i rummet. Om vi delar upp Ω i delområden på ett sätt som motsvarar det i figur 2.16 (skär området med sfärer med konstant radie, koner med konstant vinkel θ samt halvplan med konstant vinkel φ) och tittar på ett sådant litet delområde, se figur 2.21, ser vi att volymen av detta blir

$$m(\Omega_j) \approx r^2 \sin \theta \Delta r \Delta \theta \Delta \varphi.$$



Figur 2.21: Volymen av ett delområde.

För volymselementet dV gäller formellt att

$$dV = dx dy dz = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi.$$

Med ungefär samma resonemang som i fallet med polära koordinater kan man visa följande sats.

Sats 2.22 Antag att f är kontinuerlig på det slutna och begränsade området Ω i rummet. Då är

$$\iiint_{\Omega} f dx dy dz = \iiint_{\Omega'} f(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta) r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

där Ω' är det område i ett rätvinkligt $r\theta\varphi$ -system som svarar mot området Ω i xyz -systemet.

Exempel 2.23 Beräkna

$$\iiint_{\Omega} x^2 dx dy dz$$

där $\Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

Lösning: Vi inför sfäriska koordinater och får att $x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \leq 1$, dvs vi får området $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, samt volymselementet $dx dy dz = dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$. Ur detta fås alltså att

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} x^2 dx dy dz &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^1 r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi \cdot r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^1 r^4 (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta \left(\frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \right) dr d\theta d\varphi = \\ &= \left[\frac{r^5}{5} \right]_0^1 \cdot \left[-\cos \theta + \frac{\cos^3 \theta}{3} \right]_0^{\pi} \cdot \left[\frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{4} \right]_0^{2\pi} = \\ &= \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi = \frac{4\pi}{15}. \end{aligned}$$

□

2.3.3 Allmänna variabelbyten

Vi skall avsluta kapitlet om multipelintegraler med att titta något på allmänna variabelbyten. Detta avsnitt ingår ej i matematik-kursen och dessutom innehåller det en del matematiska begrepp som vi ännu ej berört. Det är ofrånkomligt att begreppet determinant dyker upp då vi skall genomföra allmänna variabelbyten. Eftersom detta begrepp tas upp först när vi läser algebra under våren, kan det vara lämpligt att vänta ett tag med detta avsnitt. För att den nyfikne redan nu skall kunna utföra kalkylen börjar vi dock med att tala om hur man beräknar dessa determinanter. En allmän 2×2 -determinant har utseendet

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

och determinantens värde är

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Antag nu att $f(x, y)$ är kontinuerlig på det slutna och begränsade området D . Antag vidare att funktionerna $x = x(u, v)$ och $y = y(u, v)$ ger en omvändbar avbildning av en sluten och begränsad mängd D' på D , dvs att varje punkt (x, y) är bilden av precis en punkt (u, v) i D' och varje punkt i D' ger en punkt i D . Antag även att funktionerna $x(u, v)$ och $y(u, v)$ har kontinuerliga partiella derivator i D' . Vi definierar då *funktionaldeterminanten* som

$$\frac{d(x, y)}{d(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Då gäller följande sats.

Sats 2.24 (Variabelbyte i dubbelintegral)

Om villkoren ovan är uppfyllda och om $\frac{d(x,y)}{d(u,v)} \neq 0$ i D' så är

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \iint_{D'} f(x(u,v), y(u,v)) \left| \frac{d(x,y)}{d(u,v)} \right| du dv .$$

Vi kan alltid ta och jämföra med hur det ser ut i enkelintegraler. Där har vi att

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(x(t)) x'(t) dt$$

då vi gör variabelbytet $x = x(t)$ ($x(\alpha) = a$, $x(\beta) = b$). Vid variabelbyte i dubbelintegraler kommer alltså det som i enkelintegraler blev $x'(t)$ att i stället bli $\left| \frac{d(x,y)}{d(u,v)} \right|$. Observera att det dyker upp ett belöppstecken då vi byter variabler i dubbelintegraler. Något bevis av satsen kan det inte bli tal om här, det blir för besvärligt. Den som är intresserad av att se ett bevis kan alltid titta i [10], men beviset är rätt krångligt.

Exempel 2.25 Beräkna

$$\iint_D (x^2 + y^2) dx dy, \text{ där } D = \{(x,y) : (x-1)^2 + y^2 \leq 1\} .$$

Lösning: Vi inför polära koordinater (r, φ) genom det vanliga sambandet

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} .$$

Funktionaldeterminanten blir

$$\begin{aligned} \frac{d(x,y)}{d(r,\varphi)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = \\ &= r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r \end{aligned}$$

och eftersom $r \geq 0$ får vi, på samma sätt som i exempel 2.20,

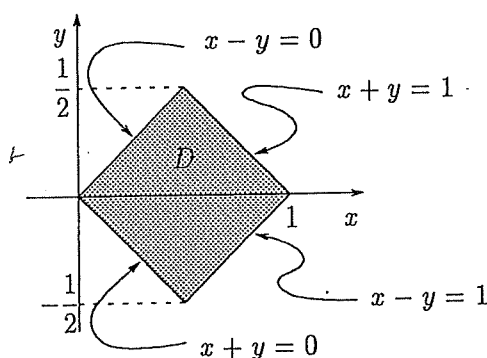
$$\begin{aligned} \iint_D (x^2 + y^2) dx dy &= \iint_{D'} r^2 \cdot r dr d\varphi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2 \cos \varphi} r^3 dr d\varphi = \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 4 \cos^4 \varphi d\varphi = 8 \int_0^{\pi/2} \cos^4 \varphi d\varphi = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 8 \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \right)^2 d\varphi = \\
&= 2 \int_0^{\pi/2} (1 + 2 \cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi) d\varphi = \\
&= 2 \int_0^{\pi/2} \left(1 + 2 \cos 2\varphi + \frac{1 + \cos 4\varphi}{2} \right) d\varphi = \frac{3\pi}{2}
\end{aligned}$$

□

Exempel 2.26 Beräkna $\iint_D \arctan(x - y) dx dy$, där D är en kvadrat med två motsatta hörn i origo och $(1,0)$.

Lösning:



Figur 2.22: Kvadrat med hörn i $(0,0)$, $(0.5,0.5)$, $(1,0)$ och $(0.5,-0.5)$.

Om vi inför de nya variablerna

$$\begin{cases} u = x - y \\ v = x + y \end{cases},$$

så begränsas kvadrattytan av linjerna $u = 0$, $u = 1$, $v = 0$ och $v = 1$.

Löser vi ut x och y ur sambandet ovan får vi

$$\begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{v-u}{2} \end{cases}$$

vilket ger funktionaldeterminanten

$$\frac{d(x,y)}{d(u,v)} = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}.$$

Således blir

$$\begin{aligned} \iint_D \arctan(x-y) dx dy &= \int_0^1 \int_0^1 \arctan u \cdot \frac{1}{2} dv du = \frac{1}{2} \int_0^1 \arctan u du = \\ &= \frac{1}{2} [u \arctan u]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{u}{1+u^2} du = \\ &= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} [\ln(1+u^2)]_0^1 = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \ln 2 \end{aligned}$$

□

Tittar vi sedan på variabelbyten i trippelintegraler ser sambandet ut som i dubbelintegralerna, förstås med de naturliga modifieringarna.

Sats 2.27 Antag att följande villkor är uppfyllda:

1. Funktionen $f(x, y, z)$ är kontinuerlig på den slutna och begränsade mängden Ω .
2. Funktionerna $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$ och $z = z(u, v, w)$ ger en omvändbar avbildning av en sluten och begränsad mängd Ω' på Ω .
3. Funktionerna $x(u, v, w)$, $y(u, v, w)$ och $z(u, v, w)$ har kontinuerliga partiella derivator och funktionaldeterminanten $\frac{d(x, y, z)}{d(u, v, w)} \neq 0$ i Ω' .

Då är

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz &= \\ &= \iiint_{\Omega'} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{d(x, y, z)}{d(u, v, w)} \right| du dv dw. \end{aligned}$$

Funktionaldeterminanten definieras här som

$$\frac{d(x, y, z)}{d(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

och en allmän 3×3 -determinant beräknas på följande sätt:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi.$$

2.4 Övningsuppgifter

2.1 Beräkna $\iint_D f(x, y) dx dy$ där D är det område som ligger mellan linjerna $x = 1$,

$x = 4$, $y = x$ och $y = 3x$, då

a) $f(x, y) = \frac{y}{x}$ b) $f(x, y) = \frac{x}{y}$.

2.2 Beräkna $\iint_D (x + 2y) dx dy$ då D är den begränsade mängd som begränsas av linjerna $x = 0$, $y = 0$ och $x + y = 2$.

2.3 Beräkna volymen av den kropp som ligger under ytan $z = xy^2$ och ovanför triangelskivan $x \leq 1$, $y \leq 1$, $x + y \geq 1$.

2.4 Låt D vara det område som definieras av $y \geq 0$, $x \leq 1$ och $y \leq x$. Beräkna

a) $\iint_D (1 + x + y)^{-2} dx dy$ b) $\iint_D e^{-x-y} dx dy$ c) $\iint_D \sqrt{x+y} dx dy$

2.5 Låt D vara fyrhörningen med hörn i $(1, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 1)$ och $(0, 2)$. Beräkna

$$\iint_D e^{x+y} dx dy.$$

2.6 Beräkna $\iint_D \sqrt{x+y^2} dx dy$, där D definieras av $0 \leq x \leq y^2$, $0 \leq y \leq 1$.

2.7 Beräkna $\iint_D \frac{y^2}{x^2} dx dy$ där D är det begränsade område som begränsas av linjerna $y = x$ och $x = 2$ samt kurvan $xy = 1$.

2.8 Beräkna

a) $\int_0^1 \left(\int_{3y}^3 e^{x^2} dx \right) dy$ b) $\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{x}}^1 e^{x/y} dy \right) dx$.

2.9 Beräkna volymen av den kropp som ligger mellan ytan $z = xy$ och xy -planet och som begränsas av planet $y = x$ och ytan $y = x^2$.

2.10 Beräkna volymen av den kropp som ligger under ytan $z = \sqrt{9 - x - y}$ och över det rektangulära område i xy -planet som bestäms av $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2$.

2.11 Området D är det begränsade område som ligger mellan kurvorna $y = x + 1$ och $y = x^2 - 2x + 1$. Beräkna områdets area.

2.12 Beräkna volymen av den kropp som begränsas av

a) ytorna $z = x^2$ och $z = 4 - x^2 - y^2$.

b) cylindern $x^2 + y^2 = 25$, planet $x + y + z = 8$ och xy -planet.

c) den elliptiska paraboloiden $z = x^2 + 4y^2$, cylindern $x^2 + 4y^2 = 4$ och xy -planet.

2.13 Beräkna

$$\iiint_{\Omega} (x + y + z) dx dy dz$$

där Ω är den kub som definieras av $0 \leq x, y, z \leq 1$.

2.14 Beräkna

$$\iiint_{\Omega} x dx dy dz ,$$

där Ω definieras av $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1 - x$ och $2y \leq z \leq 1 + y^2$.

2.15 Beräkna

$$\iiint_{\Omega} x^2 y e^{xyz} dx dy dz ,$$

där Ω är den kub som definieras av $0 \leq x, y, z \leq 1$.

2.16 Beräkna

$$\iiint_{\Omega} xyz dx dy dz ,$$

där Ω är den del av enhetsklotet som ligger i första oktanten.

2.17 Beräkna

$$\iiint_{\Omega} \frac{1}{(1 + x + y + z)^3} dx dy dz ,$$

där Ω är tetraedern med hörn i $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ och $(0,0,1)$.

2.18 Beräkna

a) $\iint_D x(x^2 + y^2) dx dy$, där $D = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \leq x\}$.

b) $\iint_D x^2 y dx dy$, där $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0, x \leq 0\}$.

2.19 Beräkna $\iint_D (x^2 - y^2) e^{2xy} dx dy$, där $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, |y| \leq x\}$.

2.20 Beräkna $\iint_D xy dx dy$, där D är cirkelskivan $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 \leq 2$.

2.21 Beräkna $\iint_D |x + y| dx dy$, där $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

2.22 Genom en rät cirkulär kon med basradien $2a$ och toppvinkeln $\frac{\pi}{2}$ borras parallellt med axeln ett cirkelrunt hål. Hålets tvärsnitt i konens basyta har en av dennas radier till diameter. Beräkna konens återstående volym.

2.23 Beräkna volymen av den begränsade kropp som begränsas av

a) paraboloiden $z = x^2 + y^2$ och planet $z = 9$.

b) paraboloiden $z = 2 - x^2 - y^2$ och konen $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

c) cylindern $z = 4 - y^2$ och den elliptiska paraboloiden $z = 2x^2 + y^2$.

d) planet $z = 2x + 2y - 1$ och paraboloiden $z = x^2 + y^2$.

2.24 Beräkna volymen av ett klot med radie R .

2.25 Beräkna volymen av en kon med cirkulärt tvärsnitt.

2.26 Beräkna volymen av det område som begränsas av paraboloiden $z = x^2 + y^2$ och planet $3x + 2y + z = 2$.

2.27 a) En skål har invändigt formen av en halvsfär med radie R . Skålen fylls med vatten till höjden h ($h \leq R$). Hur mycket vatten innehåller skålen?

b) Vid vilken höjd blir skålen halvfylld?

2.28 En pyramid har hörn i $(\pm 1, 0, 0)$, $(0, \pm 1, 0)$ och $(0, 0, 1)$. Med z -axeln som centrum borrar ett cylindriskt hål med radien $\frac{1}{2}$. Beräkna den återstående volymen.

2.29 Beräkna

$$\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 - z^2) dx dy dz,$$

där $\Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0\}$.

2.30 Beräkna

$$\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz,$$

där $\Omega = \{(x, y, z) : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

2.31 En sfär med radie a går genom medelpunkten av en sfär med radien b , $a > b$. Bestäm volymen av det område som ligger innanför sfären med radien a och utanför sfären med radien b .

2.32 Bestäm volymen av den kropp som begränsas av cylindern $9x^2 + 4y^2 = 36$ och planen $x + y + z = 10$ och $x + y - z = 10$.

2.33 Det gemensamma område som ligger innanför sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ och ovanför konen $z^2 = 3(x^2 + y^2)$, $z > 0$, liknar en glasstrut. Beräkna dess volym.

2.34 Beräkna

$$\iiint_{\Omega} \frac{x^4}{x^4 + y^4 + z^4} dx dy dz,$$

där $\Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$.

- * 2.35 Beräkna $\iint_D y \, dx \, dy$, där $D = \{(x, y) : 0 \leq x - 2y \leq 2, -1 \leq x + y \leq 1\}$
- * 2.36 Beräkna $\iint_D e^{(y-x)/(y+x)} \, dx \, dy$, där D är triangeln med hörn i $(0,0)$, $(4,0)$ och $(2,2)$.
- * 2.37 Beräkna $\iint_D e^{x-y} \, dx \, dy$, där $D = \{(x, y) : |x| + |y| \leq 1\}$.
- 2.38 Räkna uppgift 2.12c genom att
 a) byta till polära koordinater.
 * b) göra något annat lämpligt variabelbyte.
- * 2.39 Räkna uppgift 2.32 genom att utföra variabelbytet $x = \frac{1}{3}r \cos \varphi$, $y = \frac{1}{2}r \sin \varphi$.
- * 2.40 Beräkna $\iint_D x^2 \, dx \, dy$, där $D = \{(x, y) : x^2 + 4y^2 \leq 1, |y| \leq x\}$.
- * 2.41 Beräkna $\iint_D \frac{dx \, dy}{\sqrt{(x+2y)^2 + 4y^2 + 1}}$, där $D = \{(x, y) : 1 \leq (x+2y)^2 + 4y^2 \leq 4\}$.
- * 2.42 Räkna uppgift 2.5 genom att göra variabelbytet $x = s$, $x + y = t$.
- * 2.43 Visa att funktionaldeterminanten, vid byte till sfäriska koordinater, blir $r^2 \sin \theta$.
- * 2.44 Beräkna volymen av ellipsoiden $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ genom att göra ett lämpligt variabelbyte.

Facit

$$2.16 \quad \frac{1}{48}$$

$$2.17 \quad \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{5}{16}$$

$$2.18 \quad a) \frac{31\sqrt{2}}{5} \quad b) \frac{1}{15}$$

$$2.19 \quad \frac{(e^{1/2} - e^{-1/2})^2}{4}$$

$$2.20 \quad -4\pi$$

$$2.21 \quad \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

$$2.22 \quad \frac{6\pi + 32}{9} a^3$$

$$2.23 \quad a) \frac{81\pi}{2} \quad b) \frac{5\pi}{6} \quad c) 4\pi \quad d) \frac{\pi}{2}$$

$$2.24 \quad \frac{4\pi R^3}{3}$$

$$2.25 \quad \frac{\pi R^2 H}{3} \text{ där } R \text{ är basradien och } H \text{ är höjden}$$

$$2.26 \quad \frac{441\pi}{32}$$

$$2.27 \quad a) \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right) \quad b) h \approx 0.3473 R \text{ (numerisk kalkyl nödvändig)}$$

$$2.28 \quad 1 - \frac{\pi}{4}$$

$$2.29 \quad \frac{64\pi}{15}$$

$$2.30 \quad \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$2.31 \quad \frac{\pi}{12} \left(16a^3 - 8b^3 + \frac{3b^4}{a} \right)$$

$$2.32 \quad 120\pi$$

$$2.33 \quad \frac{16\pi}{3} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$2.34 \quad \frac{4\pi R^3}{9}$$

$$2.35 \quad -\frac{4}{9}$$

$$2.1 \quad a) 30 \quad b) \frac{15 \ln 3}{2}$$

$$2.2 \quad 4$$

$$2.3 \quad 0.15$$

$$2.4 \quad a) \ln \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right) \quad b) \frac{(e^{-2} - 2e^{-1} + 1)}{2} \quad c) \frac{4(2\sqrt{2} - 1)}{15}$$

$$2.5 \quad e^2$$

$$2.6 \quad \frac{2\sqrt{2} - 1}{6}$$

$$2.7 \quad \frac{27}{64}$$

$$2.8 \quad a) \frac{e^9 - 1}{6} \quad b) \frac{1}{2}$$

$$2.9 \quad \frac{1}{24}$$

$$2.10 \quad \frac{4}{15} (9^{5/2} - 8^{5/2} + 6^{5/2} - 7^{5/2})$$

$$2.11 \quad \frac{9}{2}$$

$$2.12 \quad a) 4\pi\sqrt{2} \quad b) 200\pi \quad c) 4\pi$$

$$2.13 \quad \frac{3}{2}$$

$$2.14 \quad \frac{1}{10}$$

$$2.15 \quad e - \frac{5}{2}$$

$$2.36 \quad 4(1 - e^{-1})$$

$$2.37 \quad 2 \sinh 1 = e - \frac{1}{e}$$

$$2.39 \quad 120\pi$$

$$2.40 \quad \frac{1}{20} + \frac{1}{8} \arctan 2$$

$$2.41 \quad \pi (\sqrt{5} - \sqrt{2})$$

$$2.44 \quad \frac{4\pi abc}{3}$$

