Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Daniel Carlsson

Lösningar till tentamen
TADI31 Diskret matematik, TEN1, 4 hp
2024-08-26

---

1. a) Vi har $A = \{a, b, c\}$. Potensmängden till A är då:

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

b) Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska och motivera varför.

i. $\emptyset \notin A$, då $\emptyset$ inte är ett element i A. Påståendet $\emptyset \in A$ är alltså **falskt**.

ii. $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$, då $\emptyset$ är ett element i $\mathcal{P}(A)$. Påståendet är alltså **sant**.

iii. $A \nsubseteq \emptyset$, då elementen i A, t ex a, inte finns i $\emptyset$. Påståendet $A \subseteq \emptyset$ är alltså **falskt**. (Det omvända påståendet $\emptyset \subseteq A$ är dock sant.)

iv. $|\mathcal{P}(A)| = 8$, då $\mathcal{P}(A)$ innehåller de 8 olika delmängderna till A enligt ovan, så $|\mathcal{P}(A)| = 3$ är alltså **falskt**.

Svar: Se ovan.

2. a) Primtalsfaktorisering av talet 75 600 ger
$75\,600 = 756 \cdot 100 = 7 \cdot 108 \cdot 10 \cdot 10 = 7 \cdot 54 \cdot 2 \cdot 2^2 \cdot 5^2 = 7 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2^2 \cdot 5^2$.
En sortering av faktorerna ger $75\,600 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7$.

b) En delare till talet 75 600 kan konstrueras genom att välja en eller flera av primtalsfaktorerna till talet ovan. Vi kan välja 0 till 4 2:or vilket ger 5 möjligheter för antalet 2:or. På samma sätt kan vi välja 0 till 3 3:or, vilket ger 4 olika möjligheter för antalet 3:or. På motsvarande sätt har vi 3 möjligheter för 5:orna och 2 möjlighter för 7:an (med eller inte med). Multiplikationsprincipen ger då $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ olika positiva delare till 75 600.

c) Bestäm antalet positiva delare till 75 600 som i sin tur är delbara med 45.
Då delarna ska vara delbar med $45 = 3 \cdot 3 \cdot 5$ så måste alla innehålla minst två 3:or och en 5:a. Det reducerar valet av antalet 3:or, kan välja 2 eller 3, så här har vi nu bara 2 möjligheter i valet av antalet 3:or. På samma sätt finns bara möjligheten att välja en eller två 5:or, alltså 2 möjligheter. Med samma metod som ovan ger då multiplikationsprincipen $5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 40$ olika positiva delare till 75 600 som är delbara med 45.

Svar: a) $75\,600 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7$.
b) Det finns 120 olika positiva delare till 75 600.
c) Det finns 40 olika positiva delare till 75 600 som är delbara med 45.

3. a) Vi gör en sanningsvärdestabell för $(p \to q) \to r$ och $p \to (q \to r)$ för att avgöra om de är ekvivalenta.

Var god vänd!

p	q	r	$p \to q$	S_1 : $(p \to q) \to r$	$q \to r$	S_2 : $p \to (q \to r)$	$S_1 \leftrightarrow S_2$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	0
0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	0	1	1	0

Vi ser att de båda uttrycken skiljer sig åt på rad 6 och 8 i sanningsvärdestabellen. Då de inte är lika på alla rader är uttrycken inte logiskt ekvivalenta.

b) Visa med någon metod i kursen att följande slutledningen är korrekt:

$$(q \to r) \wedge (p \vee s) \wedge \neg s \wedge (p \to \neg r) \;\Rightarrow\; \neg q$$

Vi väljer att använda deduktion för att visa att slutledningen är korrekt. Går också att visa med sanningsvärdestabell eller reduktionsmetoden.

1.)	$\neg s$	Förutsättning
2.)	$p \vee s$	Förutsättning
3.)	p	1.), 2.) och disjunktiv syllogism.
4.)	$p \to \neg r$	Förutsättning.
5.)	$\neg r$	3.), 4.) och modus ponens
6.)	$q \to r$	Förutsättning.
7.)	$\neg q$	5.), 6.) och modus tollens.

Vi har härlett slutsatsen $\neg q$ ur förutsättningarna och slutledningen är därmed korrekt.

Svar: a) Uttrycken är inte logiskt ekvivalenta. Se motivering ovan.
b) Slutledningen gäller. Se deduktion ovan.

4. Vi bestämmer samtliga lösningar till de diofantiska ekvationerna nedan.

a) $1800x + 1470y = 3000 \;\Leftrightarrow\; 180x + 147y = 300 \;\Leftrightarrow\; 60x + 49y = 100.$

Euklides algoritm ger:

$$\begin{aligned} 60 &= 49 + 11 \\ 49 &= 11 \cdot 4 + 5 \\ 11 &= 5 \cdot 2 + 1 \\ 5 &= 5 \cdot 1 \end{aligned}$$

Vi får $\mathrm{sgd}(60, 49) = 1$ och då $1|100$ så finns det lösningar enligt sats.

Vi bestämmer en första lösning till ekvationen genom att nysta upp euklides baklänges och därigenom uttrycka 1 i 60 och 49. Vi får:

$1 = 11 - 2 \cdot 5 = 11 - 2 \cdot (49 - 4 \cdot 11) = 9 \cdot 11 - 2 \cdot 49 = 9 \cdot (60 - 49) - 2 \cdot 49 = 9 \cdot 60 + 49(-11)$. Vi har alltså $60 \cdot 9 + 49(-11) = 1$. Vi förlänger med 100 och får $60 \cdot (900) + 49 \cdot (-1100) = 100$.

En första lösning är därmed $(x_0, y_0) = (900, -1100)$ och samtliga lösningar ges

då enligt sats av: $\begin{cases} x = 900 - 49 \cdot n \\ y = -1100 + 60 \cdot n \end{cases}$ där n är ett godtyckligt heltal.

Var god vänd!

b) $40x + 80y = 420$

Vi ser att 40 går jämnt upp i 80 så $\text{sgd}(40, 80) = 40$, men då 40 inte delar högerledet 420, vi har ju $420 = 10,5 \cdot 40$, så då saknas det lösningar till denna diofantiska ekvation enligt sats.

Svar: a) $\begin{cases} x = 900 - 49 \cdot n \\ y = -1100 + 60 \cdot n \end{cases}$ där n är ett godtyckligt heltal.

b) Lösningar saknas.

5. a) De 6 bokstäverna i SOMMAR kan omordnas på 6! sätt, men då det finns 2 M och vi inte får en ny följd när dessa byter plats dividerar vi med 2. Det ger:

$\frac{6!}{2} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 20 \cdot 18 = 360$

Vi kan räkna ut i hur många av dessa som två M står intill varandra genom att tänka dessa som en bokstav MM och omordna denna med de övriga 4 bokstäverna. Det ger $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ olika följder som innehåller MM.

Vi drar bort de som innehåller MM från det totala antalet och får:

$360 - 120 = \mathbf{240}$ olika följder som inte innehåller två M intill varandra.

b) Finns det någon x^2y^{21}-term i utvecklingen av $\left(\frac{1}{x} - y^3x\right)^{12}$?

Vi använder binomialsatsen för att hitta aktuell term. Vi får:

$$\left(\frac{1}{x} - y^3x\right)^{12} = \sum_{k=0}^{12} \binom{12}{k} \left(\frac{1}{x}\right)^k (-y^3x)^{12-k} = \sum_{k=0}^{12} \binom{12}{k} (-1)^{12-k} \cdot x^{12-2k} \cdot y^{36-3k}$$

Om det ska finnas en x^2y^{21}-term så måste:

$\begin{cases} 12 - 2k = 2 \\ 36 - 3k = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10 = 2k \\ 15 = 3k \end{cases} \Leftrightarrow k = 5$. Vi ser att båda kraven uppfylls då $k = 5$. Vi plockar därför ut bara den termen ur summan för utvecklingen ovan och får:

$$\binom{12}{5} \cdot (-1)^7 \cdot x^2y^{21} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot (-1) \cdot x^2y^{21} = -792x^2y^{21}.$$

Det finns alltså en x^2y^{21}-term och den har kofficienten -792.

Svar: a) Det finns 240 olika omordningar av de 6 bokstäverna i SOMMAR som inte har två M intill varandra.

b) Ja, det finns en x^2y^{21}-term i utvecklingen och den har kofficienten -792.

6. Vi visar att olikheten $2^n > n^2 - 2$ gäller för alla $n \geq 3$ med hjälp av induktion.

1.) Visa att likheten gäller för $n = 3$:

$\text{VL}_3 = 2^3 = 8$, $\text{HL}_3 = 3^2 - 2 = 9 - 2 = 7$ och då $\text{VL}_3 = 8 > 7 = \text{HL}_3$ så gäller olikheten för $n = 3$.

2.) Antag att olikheten gäller för $n = p$, det vill säga att $2^p > p^2 - 2$. Visa att då gäller olikheten också för $n = p + 1$, det vill säga att $2^{p+1} > (p + 1)^2 - 2$.

Var god vänd!

Starta med 2^{p+1} och visa med hjälp av antagandet att detta är större än $(p+1)^2 - 2$. Vid första olikheten nedan utnyttjas induktionsantagandet. Vi utnyttjar sedan upprepat att $p \geq 3$. Vi får:

$\text{VL}_{p+1} = 2^{p+1} = 2 \cdot 2^p > 2(p^2 - 2) = p^2 + p^2 - 4 = p^2 + p \cdot p - 4 \geq p^2 + 3 \cdot p - 4 =$

$= p^2 + 2p + p - 2 - 2 \geq p^2 + 2p + 1 - 2 = (p+1)^2 - 2 = \text{HL}_{p+1}$.

Vi har visat att om $\text{VL}_p > \text{HL}_p$ så följer att $\text{VL}_{p+1} > \text{HL}_{p+1}$.

Punkt 1.) och 2.) tillsammans visar att olikheten $2^n > n^2 - 2$ gäller för alla $n \geq 3$, enligt induktionsprincipen.

Svar: Se induktionsbevis ovan.

7. Den fullständiga grafen K_n har bågar mellan samtliga noder. Varje nod har alltså bågar till de övriga $n-1$ noderna och det finns n noder så antalet bågar i K_n är

$$\frac{n \cdot (n-1)}{2}.$$

Att vi delar med 2 är för att inte dubbelräkna bågarna genom att utifrån ovan räkna bågarna från båda noderna som den förbinder.

Enligt satsen för träd gäller att $N = B+1$, där N är antalet noder och B antalet bågar. Ett spännade träd med $N = n$ har då enligt denna sats: $n = B + 1 \Leftrightarrow B = n - 1$. Ett spännande träd för n noder har alltså $n - 1$ bågar.

Då vi vet hur många bågar vi startar med och hur många vi ska ha i det spännande trädet kan vi räkna ut hur många vi ska ta bort genom att subtrahera dessa. Vi får antalet som ska tas bort i K_n som:

$\dfrac{n(n-1)}{2} - (n-1)$. Uttryck kan skrivas om enligt:

$$\frac{n(n-1)}{2} - (n-1) = \frac{n(n-1)}{2} - \frac{2(n-1)}{2} = \frac{(n-2)(n-1)}{2}.$$

Uttrycket gäller bara *antalet* som behöver tas bort. För att få ett spännande träd måste vi också välja lämpliga bågar så att grafen inte blir osammanhängande.

[Vi kan rita K_n för några låga värde på n och verifiera att uttrycket stämmer. Till exempel för $n = 2$ ska ingen båge tas bort, för $n = 3$ en båge, och så vidare.]

Svar: Antalet bågar som behöver tas bort i K_n för att kunna erhålla ett spännande träd är $\dfrac{(n-2)(n-1)}{2}$, där $n \geq 2$.