Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Daniel Carlsson

Lösningar till tentamen
TADI31 Diskret matematik, TEN1, 4 hp
2025-01-15

---

1. Vi har $A = \{1,2,3,4,5\}$ och $B = \{x \in A \mid x \text{ är ett udda tal}\} = \{1,3,5\}$ som delmängder i $\mathcal{U} = \{1,2,3,4,5,6,7\}$.

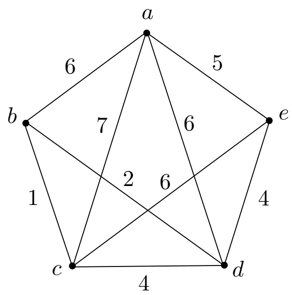
   a) Vi får då $\overline{A} \cap B = \{6,7\} \cap \{1,3,5\} = \emptyset$. Tomma mängden innehåller inga element så den enda delmängden till den är just $\emptyset$.

   b) $\overline{B} \cap A = \{2,4,6,7\} \cap \{1,2,3,4,5\} = \{2,4\}$.
   Denna mängd har delmängderna $\emptyset$, $\{2\}$, $\{4\}$, $\{2,4\}$.

   c) Då $\mathcal{U}$ har 7 element har den $2^7 = 128$ delmängder, men inte alla dessa har $B = \{1,3,5\}$ som delmängd. De aktuella delmängderna måste innehålla elementen 1, 3 och 5. De element som kan väljas till är då 2, 4, 6 eller 7. För vardera av dessa fyra element kan vi välja om de ska vara med eller inte med. Det ger totalt $2^4 = 16$ olika delmängder till $\mathcal{U}$ som har B som delmängd, enligt multiplikationsprincipen.

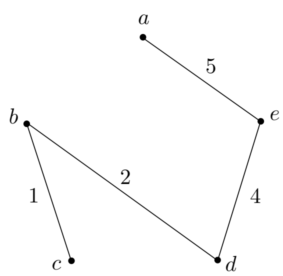
   Svar: a) $\overline{A} \cap B = \emptyset$ som bara har delämngden $\emptyset$.
   b) $\overline{B} \cap A = \{2,4\}$ som har delmängderna $\emptyset$, $\{2\}$, $\{4\}$, $\{2,4\}$.
   c) Det finns 16 delmängder till $\mathcal{U}$ som har B som delmängd.

2. a) Vi ser i grafen att noderna a, c och d har gradtal 4 och att noderna b och e har gradtal 3. Enligt sats finns det en sluten eulerväg precis då samtliga noder har jämna gradtal och en öppen eulerväg då precis två noder har udda gradtal. Alltså finns det i denna graf ingen sluten eulerväg, men en öppen eulerväg då precis b och e har udda gradtal, övriga jämna. Ett exempel på en öppen eulerväg är:

   $b - c - d - e - a - b - d - a - c - e.$

   b) I grafen ovan visas kostnaderna för respektive båge i tusentals kronor. Vi väljer att använda Kruskals algoritm och startar med noderna utan bågar. Då vi har 5 noder behövs 4 bågar, enligt satsen om träd. Vi gör nu valen enligt algoritmen:
   Billigaste bågen är $b - c$ med kostnad 1, som **väljs**.
   Nästa billigaste båge är $b - d$ med kostnad 2, som **väljs** då cykel ej bildas.
   Nästa billigaste båge är $c - d$ med kostnad 4, som **ej väljs** då cykel bildas med de tidigare bågarna.
   Nästa billigaste båge är $d - e$ med kostnad 4, som **väljs** då cykel ej bildas.
   Nästa billigaste båge är $a - d$ med kostnad 5, som **väljs** då cykel ej bildas.

   Då fyra bågarna nu valts har vi ett minimalt spännande träd, enligt Kruskals algoritm. Kostnaden blir $1 + 2 + 4 + 5 = 12$, alltså 12 000 kronor.

Var god vänd!

Svar:

a) Det finns en öppen eulerväg, men ej en sluten. Se exempel och motivering ovan.
b) Det billigaste nätverket kostar 12 000 kr och ser ut som ovan.

3. a) Bestäm antalet olika **3-siffriga** tal som kan bildas med siffrorna 250115.

Vi har fyra olika siffror, 2,5,0,1 samt dubbelt av 1 och 5, totalt sex siffror. För att hantera de siffror som har dubbletter delar vi upp i fall:

1.) Högst en av varje siffra.
Första platsen kan väljas på 4 sätt, nästa på 3 och nästa 2, vilket ger $4 \cdot 3 \cdot 2 = \mathbf{24}$ olika tal, enligt multiplikationsprincipen.

2.) Två 5:or, högst en av övriga.
Placera först ut 5:orna på 2 av 3 platser, det kan göras på $\binom{3}{2} = \dfrac{3 \cdot 2}{2 \cdot 1} = 3$ sätt. Den sista platsen kan väljas bland de övriga 3 siffrorna (0,1 eller 2), vilket ger 3 sätt. Totalt fås alltså $3 \cdot 3 = \mathbf{9}$ olika tal, enligt multiplikationsprincipen.

3.) Två 1:or, högst en av övriga.
Detta kan beräknas på samma sätt som i fall 2, med skillnaden att 5:orna ersätts med 1:or, så även här fås **9** olika tal.

Totalt fås då $24 + 9 + 9 = \mathbf{42}$ olika 3-siffriga tal med de givna siffrorna, enligt additionsprincipen.

b) Hur många olika **4-siffriga** tal kan bildas med siffrorna 20250115 ?

Vi har fyra olika siffror, men nu dubbelt av alla fyra. Det ger följande falluppdelning:

1.) Högst en av varje siffra.
De fyra platserna kan väljas på 4, 3, 2 1 sätt som ovan. Multiplikationsprincipen ger $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \mathbf{24}$ olika tal.

2.) Dubbelt av en siffra, högst en av de övriga.
Välj först vilken siffra som ska förekomma i dubblett, detta kan göras på 4 sätt. Välj sedan platser för dubbletten, detta kan göras på $\binom{4}{2} = \dfrac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6$ sätt. Fyll sedan de återstående två platserna med tal från övriga 3 siffror. Detta kan göras på $3 \cdot 2$ sätt. Totalt fås då: $4 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 2 = 24 \cdot 6 = \mathbf{144}$ olika tal, enligt multiplikationsprincipen.

3.) Dubbelt av två siffror.
Vi väljer två av de fyra möjliga siffror, vilket kan göras på $\binom{4}{2}$ sätt. Välj sedan platser för den första av dessa två siffror, detta kan göras på $\binom{4}{2}$ sätt. Den andra siffran får då de två återstående platserna, så detta kan bara göras på ett sätt. Totalt fås i detta fall: $\binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2} = \dfrac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} \cdot \dfrac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6 \cdot 6 = \mathbf{36}$ olika tal.

Sammanlagt från fallen fås då $24 + 144 + 36 = \mathbf{204}$ olika 4-siffriga tal, enligt additionsprincipen.

Svar: a) Vi kan bilda 42 olika 3-siffriga tal med givna siffror.
b) Vi kan bilda 204 olika 4-siffriga tal med givna siffror.

4. Vid en föreställning med Lundby Kulturförening blev intäkten 7000 kr. Biljettpriset var 75:- för vuxen och 40:- för barn. Om vi sätter antalet vuxna som kom till x och antalet barn som kom till y så kan vi uttrycka intäkten för antalet betalande som: $75x + 40y = 7000$.

Vi ser att koefficienterna är delbara med 5 och om vi förkortar med denna faktor får vi följande diofantiska ekvation att lösa:

$$15x + 8y = 1400$$

Euklides algoritm för 15 och 8 ger oss:

$15 = 1 \cdot 8 + 7$
$8 = 1 \cdot 7 + 1$
$7 = 7 \cdot 1$

Det ger oss $\text{sgd}(15, 8) = 1$ och då 1 delar 1400 finns det lösningar enligt sats. Euklides algoritm baklänges ger oss en första lösning:

$1 = 8 - 1 \cdot 7 = 8 - 1 \cdot (15 - 1 \cdot 8) = 15 \cdot (-1) + 8 \cdot 2$. Vi får alltså $15 \cdot (-1) + 8 \cdot 2 = 1$.

Om denna likhet multipliceras med 1400 får vi: $15 \cdot (-1400) + 8 \cdot (2800) = 1400$.

Jämför detta uttryck med ekvationen så ser vi att en lösning är $(x_0, y_0) = (-1400, 2800)$

Den allmänna lösningen till den diofantiska ekvation blir därför enligt sats:

$$\begin{cases} x = -1400 + 8n \\ y = 2800 - 15n \end{cases} \quad \text{där } n \text{ är godtyckligt heltal.}$$

Då det ska vara fler barn än vuxna och då det är minst 50 vuxna kan vi sätta både x och y större än eller lika med 50 och lösa den dubbla olikheten. Vi får:

$$\begin{cases} x = -1400 + 8n \geq 50 \\ y = 2800 - 15n \geq 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8n \geq 1450 \\ -15n \geq -2750 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \geq \frac{1450}{8} = 181 + \frac{1}{4} \\ n \leq \frac{2750}{15} = 183 + \frac{1}{3} \end{cases}$$

Vi får att $n = 182$ och $n = 183$ är de enda värdena som uppfyller båda olikheterna.

$$n = 182 : \begin{cases} x = -1400 + 8 \cdot 182 = 56 \\ y = 2800 - 15 \cdot 182 = 70 \end{cases} \quad n = 183 : \begin{cases} x = -1400 + 8 \cdot 183 = 64 \\ y = 2800 - 15 \cdot 183 = 55 \end{cases}$$

Vi ser att i den första är antalet barn fler än antalet vuxna, men i den andra är antalet vuxna flest. Därmed vet vi att det var 56 vuxna och 70 barn på föreställningen.

Svar: Den diofantiska ekvationen $75x + 40y = 7000$ har den allmänna lösningen

$$\begin{cases} x = -1400 + 8n \\ y = 2800 - 15n \end{cases} \quad \text{där } n \text{ är godtyckligt heltal.}$$

Det var 56 vuxna och 70 barn på föreställningen.

5. a) Uttrycket nedan antas vara falskt enligt uppgift. Vi visar hur vi kan resonera oss fram till sanningsvärdet på parametern s.

$$(r \wedge q) \wedge \neg p \to p \vee (\neg s \leftrightarrow q)$$

1.) Prioriteringsreglerna för konnektiven gör att det är implikationen som är den sista operationen och därmed den som är falsk. Implikationen är bara falsk då förledet $(r \wedge q) \wedge \neg p$ är sant samtidigt som efterledet $p \vee (\neg s \leftrightarrow q)$ är falskt.

2.) $(r \wedge q) \wedge \neg p$ sann gör r sann, q sann och $\neg p$ sann, då vi har konnektivet ”och” mellan dessa.

3.) Att $p \vee (\neg s \leftrightarrow q)$ är falsk innebär att p måste vara falsk (vilket stämmer med att $\neg p$ sann ovan) och $\neg s \leftrightarrow q$ falsk, då vi har konnektivet ”eller” mellan dessa.

4.) Då q sann från 2.) så måste $\neg s$ vara falsk för att $\neg s \leftrightarrow q$ ska bli falsk. Därmed får vi att **s** är **sann**.

b) Vi kan visa att följande slutledning är korrekt med någon av de tre metoderna i kursen; sanningsvärdestabell, deduktion eller reduktion. Vi väljer att visa det med deduktion då det blir kort.

$$(q \to \neg p) \wedge (s \to p) \wedge q \ \Rightarrow \ \neg s$$

1.)	q	Förutsättning
2.)	$q \to \neg p$	Förutsättning
3.)	$\neg p$	1.), 2.) och modus ponens.
4.)	$s \to p$	Förutsättning.
5.)	$\neg s$	3.), 4.) och modus tollens.

Vi har härlett slutsatsen $\neg s$ ur förutsättningarna och slutledningen är därmed korrekt.

Svar: a) Satsparametern s är sann.
b) Slutledningen är korrekt. Se deduktion ovan.

6. I en vanlig kortlek med 52 kort finns 4 färger (spader, hjärter, ruter och klöver) och i varje färg finns 13 valörer (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, knekt, dam, kung och ess). En hand med 5 kort ger ”tvåpar” om man har två kort ur en valör och två kort ur en annan valör samt ett femte kort ur en tredje valör. (Bilden utgör ett exempel.)

a) Vi beräknar antalet olika sätt vi kan få tvåpar med fem kort ur en kortlek genom att successivt välja valörer och dra kort ur de valda valörerna. Ordningen mellan valörer och kort spelar ej roll, så vi ska räkna kombinationer. Välj först valörer för de två paren, detta kan göras på $\binom{13}{2}$ sätt. Dra två kort ur vardera valör, detta kan göras på $\binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2}$ sätt. Välj nu valör för det femte kortet, det kan göras på 11 sätt. Välj sedan ett kort ur denna valör, vilket kan göras på 4 sätt.

Totalt kan vi då enligt multiplikationsprincipen skapa en hand med tvåpar på:

$$\binom{13}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot 11 \cdot 4 = \frac{13 \cdot 12}{2 \cdot 1} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} \cdot 44 = 13 \cdot 6^3 \cdot 44 = 123\,552 \text{ olika sätt.}$$

b) Hur många händer med tvåpar innehåller inget kort med lägre valör än 7?

Valen kan göras som i a)-uppgiften, men med begränsningen att alla valörer ska väljas bland valörerna 7,8,9,10, knekt, dam kung, ess, alltså bland 8 valörer. Det ger $\binom{8}{2}$ sätt att välja valörer för tvåparet, samma antal sätt att dra kort som tidigare, men 6 sätt att välja valör för tredje kortet. Vi får då:

$$\binom{8}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot 6 \cdot 4 = \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} \cdot 24 = 28 \cdot 36 \cdot 24 = 24\,192 \text{ olika sätt.}$$

Svar: a) Det finns 123 552 olika händer som ger tvåpar.
b) Det finns 24 192 olika händer som ger tvåpar där inget kort är lägre än 7.

(Valen kan göras i lite olika ordning, t ex kan man välja 3 valörer direkt och sedan dra kort. Det är här ok att svara med ett uttryck, t ex. produkterna innan de sista svaren, då svaren blir stora.)

7. Avgör för vilket lägsta värde på parametern a som följande likhet kan vara sann. Visa sedan med hjälp av induktion att likheten gäller för alla $n \geq a$ för detta värde på a.

$$\sum_{k=a}^{n} \frac{3}{k(k+1)} = \frac{n-2}{n+1}$$

Vi kan undersöka genom att välja olika värden på a och se att första termen i summan i vänsterledet blir lika med formeln, med n som det aktuella a-värdet. Om vi t ex sätter $a = 1$ och $n = 1$ fås $\mathrm{VL}_1 = \sum_{k=1}^{1} \frac{3}{k(k+1)} = \frac{3}{1 \cdot 2} = \frac{3}{2}$ och $\mathrm{HL}_1 = \frac{-1}{2}$.

Likheten stämmer alltså inte för $a = 1$.

För $a = 2$ och $n = 2$ fås på motsvarande sätt $\mathrm{VL}_2 = \frac{3}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2}$ och $\mathrm{HL}_2 = \frac{0}{3} = 0$ så det ger ej likhet, men för $a = 3$ och $n = 3$ fås:

$\mathrm{VL}_3 = \sum_{k=3}^{3} \frac{3}{k(k+1)} = \frac{3}{3 \cdot 4} = \frac{1}{4}$ och $\mathrm{HL}_3 = \frac{1}{4}$.

Summan i vänsterledet för $a = 3$ med bara första termen medtagen ger alltså samma värde som formeln i högerledet med $n = 3$ insatt. Vi visar nu att likheten gäller, för $a = 3$ och för alla $n \geq 3$, med hjälp av induktion.

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{3}{k(k+1)} = \frac{n-2}{n+1}$$

1.) Basfallet är redovisat ovan för $a = 3$ och $n = 3$. Både vänsterled och högerled ger oss $\frac{1}{4}$ och likheten ovan gäller alltså för dessa värden.

2.) Antag att likheten ovan gäller för ett visst $n = p$, d v s att $\sum_{k=3}^{p} \frac{3}{k(k+1)} = \frac{p-2}{p+1}$.

Visa att likheten då också gäller för $n = p+1$, d v s att $\sum_{k=3}^{p+1} \frac{3}{k(k+1)} = \frac{p-1}{p+2}$.

$$\mathrm{VL}_{p+1} = \sum_{k=3}^{p+1} \frac{3}{k(k+1)} = \sum_{k=3}^{p} \frac{3}{k(k+1)} + \frac{3}{(p+1)(p+2)} = \frac{p-2}{p+1} + \frac{3}{(p+1)(p+2)} =$$

$$= \frac{(p-2)(p+2)+3}{(p+1)(p+2)} = \frac{p^2-1}{(p+1)(p+2)} = \frac{(p+1)(p-1)}{(p+1)(p+2)} = \frac{p-1}{p+2} = \mathrm{HL}_{p+1}.$$

Vid 3:e likhetstecknet utnyttjas induktionsantagandet ovan.

Vi har visat att om $\mathrm{VL}_p = \mathrm{HL}_p$ så är $\mathrm{VL}_{p+1} = \mathrm{HL}_{p+1}$.

1.) och 2.) visar tillsammans att likheten $\sum_{k=3}^{n} \frac{3}{k(k+1)} = \frac{n-2}{n+1}$ gäller för alla $n \geq 3$, enligt induktionsprincipen.

Svar: För $a = 3$ gäller likheten för alla $n \geq 3$. Se bevis ovan.