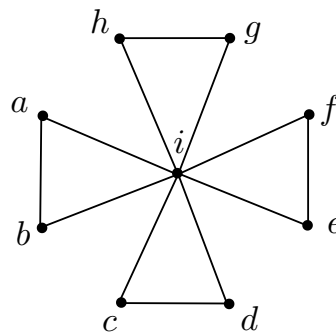


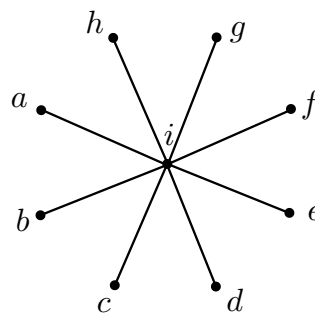
Lösningar till tentamen
TADI31 Diskret matematik, TEN1, 4 hp
2025-03-19

1. a) Grafen har ej någon hamiltoncykel. Varje slutna väg som besöker alla noder måste passera noden i flera gånger för att komma från ett "blomblad" till nästa. Detta gör att någon hamiltoncykel ej existerar.



- b) Enligt sats finns en öppen eulerväg om precis två noder har udda gradtal och en sluten eulerväg om samtliga noder har jämnt gradtal. I denna graf har alla noder jämnt gradtal (i har gradtal 8, alla övriga har gradtal 2), så därför finns ingen öppen eulerväg, men en sluten eulerväg. Ett exempel på en sluten eulerväg är $a - b - i - c - d - i - e - f - i - g - h - i - a$.

- c) Det finns många sätt att skapa ett spännande träd till grafen (en sammanhängande delgraf som innehåller alla noder och är cykelfri). Ett exempel är det som visas till höger där de yttre bågarna på "blombladen" tagits bort.



- Svar:** a) Grafen har ingen hamiltoncykel. Se motivering ovan.
b) Grafen har sluten eulerväg, men ej öppen. Se motivering och exempel ovan.
c) Exempel på spännande träd ges i bilden ovan.

2. a) Vi bestämmer största gemensamma delare för talen 1260 och 3000 med hjälp av euklides algoritmen.

Euklides algoritmen ger:

$$\begin{aligned} 3000 &= 2 \cdot 1260 + 480 & \text{Vi får alltså att } \text{sgd}(3000, 1260) &= \mathbf{60}. \\ 1260 &= 2 \cdot 480 + 300 \\ 480 &= 300 + 180 \\ 300 &= 180 + 120 \\ 180 &= 120 + 60 \\ 120 &= 2 \cdot 60 \end{aligned}$$

- b) Ange samtliga lösningar till den diofantiska ekvationen $6000x + 2520y = 600$.

Om vi delar alla koefficienter med 2 får vi ekvationen $3000x + 1260y = 300$. Då vi har $\text{sgd}(3000, 1260) = 60$ och $60 \mid 300$ så har ekvationen lösningar enligt sats. Vi förkortar med 60 och får ekvationen: $50x + 21y = 5$.

Var god vänd!

Vi löser nu ekvationen $50x + 21y = 5$. Euklides algoritmen ger:

$$50 = 2 \cdot 21 + 8$$

$$21 = 2 \cdot 8 + 5$$

$$8 = 5 + 3$$

$$5 = 3 + 2$$

$$3 = 2 + 1$$

$$2 = 2 \cdot 1$$

Vi får alltså att $\text{sgd}(50, 21) = 1$ och då $1 \mid 5$ finns lösningar enligt sats.

Vi bestämmer en första lösning till ekvationen genom att nysta upp Euklides baklänges och därigenom uttrycka 1 i 21 och 50. Vi får:

$$\begin{aligned} 1 &= 3 - 2 = 3 - (5 - 3) = 2 \cdot 3 - 5 = 2 \cdot (8 - 5) - 5 = 2 \cdot 8 - 3 \cdot 5 = 2 \cdot 8 - 3 \cdot (21 - 2 \cdot 8) = \\ &= 8 \cdot 8 - 3 \cdot 21 = 8 \cdot (50 - 2 \cdot 21) - 3 \cdot 21 = 8 \cdot 50 - 19 \cdot 21. \end{aligned}$$

Vi har alltså

$$50 \cdot 8 + 21(-19) = 1. \text{ Vi förlänger med 5 och får } 50 \cdot 40 + 21(-95) = 5.$$

En första lösning är därmed $(x_0, y_0) = (40, -95)$ och samtliga lösningar ges då

$$\text{enligt sats av: } \begin{cases} x = 40 - 21 \cdot n \\ y = -95 + 50 \cdot n \end{cases} \text{ där } n \text{ är ett godtyckligt heltal.}$$

Svar: a) Största gemensamma delaren till 1260 och 3000 är 60.

b) Samtliga lösningar till den diofantiska ekvationen är:

$$\begin{cases} x = 40 - 21 \cdot n \\ y = -95 + 50 \cdot n \end{cases} \text{ där } n \text{ är ett godtyckligt heltal.}$$

3. a) En arbetsgrupp ska utses, bestående av en projektledare, en ekonomiansvarig samt ytterligare två gruppmedlemmar som inte ges någon särskild roll. Det finns 8 personer på arbetsplatsen som alla kan väljas till arbetsgruppen. Vi bestämmer hur många olika sätt arbetsgruppen då kan sättas samman:



Utan några restriktioner finns det 8 sätt att välja projektledare, därefter finns det 7 sätt att välja ekonomiansvarig. De återstående två personerna väljs bland 6 st utan inbördes ordning, då dessa inte ges särskilda roller i arbetsgruppen. Detta kan därmed göras på $\binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15$ sätt. Multiplikationsprincipen ger då totalt: $8 \cdot 7 \cdot 15 = 56 \cdot 15 = \mathbf{840}$ olika arbetsgrupper.

- b) Med 5 kvinnor och 3 män och kravet att en kvinna ska vara projektledare, kan projektledaren istället väljas på 5 sätt, men den ekonomiansvarige kan fortfarande väljas bland de återstående 7 personerna och de sista två kan som tidigare väljas på $\binom{6}{2} = 15$ sätt. Multiplikationsprincipen ger då $5 \cdot 7 \cdot 15 = 35 \cdot 15 = \mathbf{525}$ sätt att bilda arbetsgruppen på.
- c) Med samma villkor som i b), men där vi också lägger till kravet att arbetsgruppen ska innehålla precis en man kan vi dela upp problemet på följande sätt. Vi väljer först en kvinna som projektledare, vilket kan göras på 5 sätt. Sedan väljer vi ut en av de tre männen, vilket kan göras på 3 sätt. Vi väljer också ut ytterligare två kvinnor bland de återstående 4 utan inbördes ordning, vilket kan göras på

Var god vänd!

$\binom{4}{2}$ sätt. Bland den valda mannen och de två kvinnorna kan nu ekonomiansvarig väljas på 3 sätt. Totalt ger multiplikationsprincipen att arbetsgruppen kan sättas samman på $5 \cdot 3 \cdot \binom{4}{2} \cdot 3 = 15 \cdot \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} \cdot 3 = 15 \cdot 6 \cdot 3 = \mathbf{270}$ olika sätt.

[Ett alternativ till ovan är att dela upp i två fall, ett där mannen är ekonomiansvarig (ger $5 \cdot 3 \cdot \binom{4}{2} = 90$) och ett där han är en övrig medlem i gruppen (ger $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 = 180$. De sista två 3:orna här kommer från att välja en av 3 män och en av 3 kvinnor till övriga medlemmar.). $90 + 180 = 270$.]

Svar: Arbetsgruppen kan utifrån de olika villkoren utses på:

a) 840 sätt b) 525 sätt c) 270 sätt.

4. Vi ger ett konkret motexempel med 3 element i grundmängden för likheten i a) och ger ett bevis för att likheten i b) gäller.

a) $(C \setminus \bar{A}) \cup B = (B \cup C) \setminus A$

Undersökning visar att likheten inte gäller. Låt därför $A = \{a\}$, $B = \{a, b\}$ och $C = \{a, c\}$ samt $\mathcal{U} = \{a, b, c\}$. Med dessa mängder får vi:

$$\mathbf{VL} = (C \setminus \bar{A}) \cup B = (\{a, c\} \setminus \overline{\{a\}}) \cup \{a, b\} = (\{a, c\} \setminus \{b, c\}) \cup \{a, b\} = \{a\} \cup \{a, b\} = \{a, b\}.$$

$$\mathbf{HL} = (B \cup C) \setminus A = (\{a, b\} \cup \{a, c\}) \setminus \{a\} = \{a, b, c\} \setminus \{a\} = \{b, c\}.$$

Då VL och HL ger olika mängder i exemplet ovan gäller inte likheten för alla mängder A , B och C .

b) $(A \cap \bar{B}) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$

Vi använder ett numrerat venndiagram och går igenom operationerna i vänsterled och högerled var för sig och ser vilka områden de svarar mot.

VL:

A : 1,2,3,5

B : 1,2,4,6

$\bar{B}$: 3,5,7,8

$A \cap \bar{B}$: 3,5

C : 1,3,4,7

$\mathbf{VL} = (A \cap \bar{B}) \setminus C$: 5

HL:

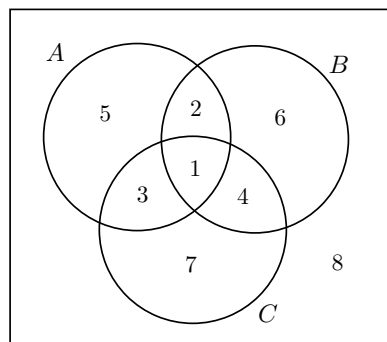
B : 1,2,4,6

C : 1,3,4,7

$B \cup C$: 1,2,3,4,6,7

A : 1,2,3,5

$\mathbf{HL} = A \setminus (B \cup C)$: 5



Då VL och HL svarar mot samma område i det numrerade venndiagrammet ovan så visar det att likheten gäller för alla mängder A , B och C .

Svar: Se motexempel för likheten i a) och bevis för likheten i b) ovan.

5. a) Vi har $S_1 : (\neg q \rightarrow \neg p) \wedge r$ och $S_2 : (\neg p \wedge r) \vee (r \wedge q)$. Vi beräknar sanningsvärdestabellerna för båda uttrycken och besvarar sedan frågan huruvida $S_1 \Rightarrow S_2$ eller om $S_2 \Rightarrow S_1$ eller om inget av uttrycken logiskt implicerar det andra.

Var god vänd!

p	q	r	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q \rightarrow \neg p$	$S_1 : (\neg q \rightarrow \neg p) \wedge r$	$\neg p \wedge r$	$r \wedge q$	$S_2 : (\neg p \wedge r) \vee (r \wedge q)$
1	1	1	0	0	1	1	0	1	1
1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	1	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1	0	1
0	0	0	1	1	1	0	0	0	0

Vi ser i sanningsvärdestabellen att S_1 och S_2 har samma sanningsvärdestabell. Därför gäller både $S_1 \Rightarrow S_2$ och $S_2 \Rightarrow S_1$, det vill säga de är logiskt ekvivalenta.

b) Vi visar att slutledningen $(p \vee q) \wedge \neg q \wedge (p \rightarrow \neg r) \Rightarrow \neg r$ är korrekt med hjälp av deduktion.

- 1.) $p \vee q$ Förutsättning.
- 2.) $\neg q$ Förutsättning.
- 3.) p 1.), 2.) och disjunktiv syllogism.
- 4.) $p \rightarrow \neg r$ Förutsättning.
- 5.) $\neg r$ 3.), 4.) och modus ponens.

Vi har härlett slutsatsen $\neg r$ ur förutsättningarna och slutledningen är därmed korrekt.

Svar: a) Vi har visat ovan att $S_1 \Leftrightarrow S_2$. Båda uttrycken implicerar varandra.

b) Slutledningen är korrekt. Se härledning ovan.

6. En talföljd a_n , där $n = 1, 2, 3, \dots$ definieras rekursivt av uttrycket

$$\begin{cases} a_n = 2 \cdot a_{n-1} + 1, & n = 2, 3, 4, \dots \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

Vi beräknar de första talen i talföljden och ser ett mönster utifrån vilket vi kan föreslå en formel för a_n .

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$$

$$a_3 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$$

$$a_4 = 2 \cdot 7 + 1 = 15$$

$$a_5 = 2 \cdot 15 + 1 = 31$$

Om vi jämför denna talföljd med 2^n så ser vi att talen 2, 4, 8, 16, 32 är precis ett större, så en möjlig formel skulle kunna vara $a_n = 2^n - 1$.

Vi visar nu att denna formel gäller för alla $n \geq 1$, med hjälp av induktion.

Kalla under beviset talföljden som kommer ur formeln för b_n , alltså att $b_n = 2^n - 1$ för $n \geq 1$. Talföljden som kommer ur rekursionen betecknar vi fortsatt med a_n . Vi vill alltså visa att $a_n = b_n$ för alla $n \geq 1$.

1.) Visa att rekursionen och formeln ger samma tal för $n = 1$.

$a_1 = 1$ och $b_1 = 2^1 - 1 = 2 - 1 = 1$. Vi har alltså att $a_1 = b_1$.

Var god vänd!

2.) Antag att rekursionen överensstämmer med formeln för ett visst $n = p$, det vill säga att $a_p = b_p$. Visa att då överensstämmer också talet ur rekursionen med talet ur formeln för $n = p + 1$, det vill säga att $a_{p+1} = b_{p+1}$.

Utifrån rekursionen och induktionsantagandet kan vi nu visa att:

$$a_{p+1} = 2 \cdot a_p + 1 = 2 \cdot b_p + 1 = 2 \cdot (2^p - 1) + 1 = 2^{p+1} - 2 + 1 = 2^{p+1} - 1 = b_{p+1}$$

Vid första likhetstecknet ovan används rekursionen och i det andra likhetstecknet utnyttjas induktionsantagandet. Vi har visat att om $a_p = b_p$ så är också $a_{p+1} = b_{p+1}$.

1.) och 2.) ovan visar tillsammans att $a_n = 2^n - 1$ för alla $n \geq 1$, enligt induktionsprincipen.

Svar: $a_n = 2^n - 1$ för alla $n \geq 1$. Se induktionsbevis ovan.

7. a) Bokstäverna i ordet PÅSKAFTON omordnas så att olika "ord" med nio bokstäver bildas. Antalet bokstavsföljder som innehåller SKAFT kan vi få genom att tänka att vi skriver SKAFT på en lapp samt de övriga fyra bokstäverna på var sin lapp och sedan omordnar dessa totalt 5 lappar på alla möjliga sätt.



Det kan då göras på $5! = 120$ olika sätt. Det finns alltså **120** "ord" som innehåller SKAFT. På samma sätt kan vi få antalet "ord" som innehåller ÅSKA genom att skriva ÅSKA på en lapp och övriga fem bokstäver på var sina lappar. Dessa totalt 6 lappar kan omordnas på $6! = 720$ sätt. Det finns alltså **720** "ord" som innehåller ÅSKA.

I de två räkningarna ovan finns dock ett överlapp. De ord som innehåller både SKAFT och ÅSKA har räknats två gånger. Orden har dock SKA gemensamt, så de ord som innehåller båda måste innehålla ÅSKAFT. Skriv detta på en lapp och de övriga tre bokstäver (P,O,N) på var sina lappar. Detta ger totalt 4 lappar och därmed $4! = 24$ bokstavsföljder som innehåller ÅSKAFT.

Sammanlagt fås då $120 + 720 - 24 = 816$ "ord" som innehåller SKAFT eller ÅSKA.

- b) Antalet "ord" vi kan bilda som inte innehåller två vokaler intill varandra kan fås genom att först omordna de bokstäver som inte är vokaler, det vill säga PSKFTN. Dessa kan omordnas på $6! = 720$ sätt.

När detta är gjort drar vi isär bokstäverna så att det skapas en plats mellan varje bokstav, samt en framför första och en bakom sista bokstaven, på följande sätt: _N_S_T_F_P_K_. Dessa sammanlagt 7 tomma platser ska ges till vokaler A, Å eller O. Om vi väljer plats för en av dem i taget ger multiplikationsprincipen att detta kan göras på $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ sätt.

Totalt finns alltså $720 \cdot 210 = 720 \cdot 200 + 720 \cdot 10 = 144000 + 7200 = 151\,200$ olika "ord" som inte innehåller två vokaler intill varandra, enligt multiplikationsprincipen. (Här är det ok att svara med ett uttryck, t ex $720 \cdot 210$.)

Svar: a) Det finns 816 "ord" som innehåller SKAFT eller ÅSKA.

b) Det finns $720 \cdot 210 = 151\,200$ "ord" som inte har två vokaler intill varandra.