

Lösningar till tentamen
TADI31 Diskret matematik, TEN1, 4 hp
2026-01-13

1. a) Vi ger ett konkret motexempel till $(C \cap \bar{B}) \setminus \bar{A} = (A \cup B) \cap C$.

Låt $A = B = C = \{a\}$ vara mängder i grundmängden $\mathcal{U} = \{a, b, c\}$. Vi får:

$$VL = (C \cap \bar{B}) \setminus \bar{A} = (\{a\} \cap \{b, c\}) \setminus \{b, c\} = \emptyset \setminus \{b, c\} = \emptyset$$

$$HL = (A \cup B) \cap C = (\{a\} \cup \{a\}) \cap \{a\} = \{a\} \cap \{a\} = \{a\}$$

Då VL och HL ger olika mängder i exemplet ovan gäller alltså inte likheten för alla mängder A , B och C .

- b) Vi har $A = \{b, c\}$, $B = \{b, e\}$ och $C = \{a, c, e, f\}$ som är mängder i grundmängden $\mathcal{U} = \{a, b, c, d, e, f\}$. Vi beräknar:

$$(\bar{A} \cap B) \setminus C = (\{a, d, e, f\} \cap \{b, e\}) \setminus \{a, c, e, f\} = \{e\} \setminus \{a, c, e, f\} = \emptyset.$$

Tomma mängden har endast en delmängd och det är \emptyset .

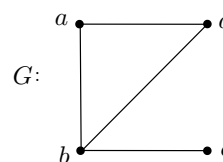
- c) För att få antalet delmängder till mängden C som innehåller minst elementet e kan vi tänka att vi först väljer elementet e , men för övriga tre element kan vi välja om de ska vara med eller inte i en viss delmängd. Det ger 2 möjligheter för vardera element a , c och f och alltså $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ olika delmängder enligt multiplikationsprincipen.

Svar: a) Likheten gäller ej. Se motexempel ovan.

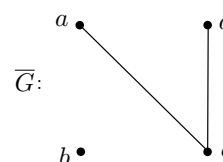
b) $(\bar{A} \cap B) \setminus C = \emptyset$, som endast har en delmängd, nämligen \emptyset .

c) C har 8 delmängder som innehåller minst elementet e .

2. a) I figuren intill visas grafen G samt nedanför den komplementgraf \bar{G} . Komplementgraf \bar{G} har bågar mellan precis de par av noder som inte har en båge i G .



Grafen G är sammanhängande då varje par av noder har en väg mellan sig. Grafen \bar{G} är dock inte sammanhängande. Noden b har till exempel ingen väg till noden a , vilket skulle krävas om den skulle vara sammanhängande.



- b) En graf som är ett träd har 7 noder av grad tre, 8 noder av grad fyra, 6 noder av grad fem och ett visst antal löv. Enligt satsen för träd gäller att $N = B + 1$, där N är antalet noder och B är antalet bågar i grafen. Om vi låter antalet löv betecknas med x så blir antalet noder enligt informationen ovan $N = 7 + 8 + 6 + x = 21 + x$.

Enligt handskakningslemmat är summan av gradtalen alltid två gånger antalet bågar i grafen, det gör att vi kan uttrycka B i x . Vi får:

$$B = \frac{\text{Summa gradtal}}{2} = \frac{7 \cdot 3 + 8 \cdot 4 + 6 \cdot 5 + x \cdot 1}{2} = \frac{21 + 32 + 30 + x}{2} = \frac{83 + x}{2}$$

Var god vänd!

Uttrycken för N och B ovan insatt i sambandet för träd ger nu:

$$\begin{aligned} N = B + 1 &\Leftrightarrow 21 + x = \frac{83 + x}{2} + 1 \Leftrightarrow 20 + x = \frac{83 + x}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 40 + 2x = 83 + x \Leftrightarrow 2x = 43 + x \Leftrightarrow x = 43 \end{aligned}$$

Grafen innehåller alltså 43 löv.

Svar: a) Se komplementgraf ovan. G är sammanhängande, men inte \overline{G} .
b) Grafen innehåller 43 löv.

3. En butik säljer blockljus, de små kostar 24 kr och de större kostar 70 kr. Du handlar blockljus av de två storlekarna för sammanlagt 610 kr. Om vi låter x vara antalet små blockljus och y vara antalet stora blockljus som vi köper så ger uppgiften följande diofantiska ekvation:

$$24x + 70y = 610$$

Denna kan förkortas med en faktor 2 vilket ger:

$$12x + 35y = 305$$



Vi löser denna ekvation på vanligt sätt och tar sedan fram den/de lösningar för vilket både x och y är större än eller lika med noll.

Euklides algoritm ger:

$$\begin{array}{ll} 35 = 2 \cdot 12 + 11 & \text{Vi får } \text{sgd}(12, 35) = 1 \text{ och då } 1 \mid 305 \text{ så} \\ 12 = 1 \cdot 11 + 1 & \text{finns det lösningar enligt sats.} \\ 11 = 1 \cdot 11 & \end{array}$$

Vi bestämmer en första lösning till ekvationen genom att nysta upp euklides baklänges och därigenom uttrycka 1 i 12 och 35. Vi får:

$1 = 12 - 11 = 12 - (35 - 2 \cdot 12) = 3 \cdot 12 - 35$. Vi får då $12 \cdot 3 + 35(-1) = 1$ och om vi förlänger med 305 får vi: $12 \cdot (915) + 35 \cdot (-305) = 305$.

En första lösning är därmed $(x_0, y_0) = (915, -305)$ och **samtliga lösningar** ges då

enligt sats av:
$$\begin{cases} x = 915 - 35 \cdot n \\ y = -305 + 12 \cdot n \end{cases} \text{ där } n \text{ är ett godtyckligt heltal.}$$

De antal vi köpt av ljusen kan inte vara ett negativt tal, så vi sätter uttrycken för x och y större än eller lika med 0 och löser de två olikheterna. Vi får:

$$\begin{cases} x = 915 - 35 \cdot n \geq 0 \\ y = -305 + 12 \cdot n \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 915 \geq 35n \\ 12n \geq 305 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \leq \frac{915}{35} = 26 \frac{5}{35} \\ n \geq \frac{305}{12} = 25 \frac{5}{12} \end{cases}$$

Det enda värde på n som uppfyller båda olikheterna är $n = 26$. Vi sätter in detta värde i uttrycket för samtliga lösningar och får:

$$\begin{cases} x = 915 - 35 \cdot 26 = 915 - 910 = 5 \\ y = -305 + 12 \cdot 26 = -305 + 312 = 7 \end{cases} \quad \text{Vi har alltså köpt 5 små och 7 stora blockljus.}$$

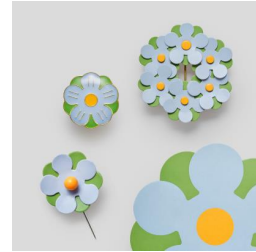
Var god vänd!

Svar: Samtliga lösningar till ekvationen ges av

$$\begin{cases} x = 915 - 35 \cdot n \\ y = -305 + 12 \cdot n \end{cases} \quad \text{där } n \text{ är ett godtyckligt heltal.}$$

Vi har köpt 5 små och 7 stora blockljus.

4. a) Majblomman ges varje år ut i olika färger. Den består av yttre kronblad, inre kronblad samt en pistill i mitten som bilden visar. Om vardera ring av kronblad kan ges 7 färger och pistillen kan ges 5 olika färger så kan blommorna totalt färgas på $7 \cdot 7 \cdot 5 = 245$ olika sätt, enligt multiplikationsprincipen.



- b) Vi vill köpa totalt 12 bland majblommans 4 olika produkter. Ordningen spelar ej roll mellan de valda produkterna och vi kan upprepa samma produkt flera gånger. Det är alltså en fråga om en kombination med upprepning, det vill säga ett staketproblem. Med fyra produkter får vi 3 staket. Detta ger då:

$$\binom{12+3}{3} = \binom{15}{3} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 5 \cdot 7 \cdot 13 = 455 \text{ olika sätt att fördela köpet av}$$

12 st bland de fyra produkterna.

- c) Om vi lägger till villkoret att vi vill köpa högst 4 kransar till frågan i b) så kan vi räkna ut hur många sätt vi då kan köpa 12 produkter om vi tar samtliga i b) minus de där vi har 5 kransar eller mer. Starta därför med 5 kransar. Då återstår att köpa 7 stycken bland de 4 produkterna, vilket ger ett staketproblem med 7 objekt och 3 staket. Vi får:

$$\binom{7+3}{3} = \binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120. \quad \text{Vi tar alla minus dessa och får } 455 - 120 = 335$$

olika sätt att köpa 12 bland de 4 produkterna där vi får högst fyra kransar.

Svar: a) 245 olika majblommor kan bildas.

b) Det finns 455 olika sätt att köpa 12 stycken fördelat på de fyra produkterna.

c) 335 stycken av de i b) innehåller högst 4 kransar.

5. Vi visar med induktion att likheten nedan gäller för alla $n \geq 2$.

$$\sum_{k=2}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} - 1$$

- 1.) Vi visar att likheten för $n = 2$:

$$VL_2 = \sum_{k=2}^2 k^3 = 2^3 = 8. \quad HL_2 = \frac{2^2 \cdot 3^2}{4} - 1 = 9 - 1 = 8.$$

Vi ser att VL och HL båda är 8 och därmed lika för $n = 2$.

- 2.) Antag nu att likheten gäller för ett visst $n = p$, det vill säga $\sum_{k=2}^p k^3 = \frac{p^2(p+1)^2}{4} - 1$

$$\text{Visa att då gäller också likheten för } n = p + 1, \text{ d v s: } \sum_{k=2}^{p+1} k^3 = \frac{(p+1)^2(p+2)^2}{4} - 1$$

Var god vänd!

$$\begin{aligned}
VL_{p+1} &= \sum_{k=2}^{p+1} k^3 = \sum_{k=2}^p k^3 + (p+1)^3 = \frac{p^2(p+1)^2}{4} - 1 + (p+1)^3 = \\
&= \frac{p^2(p+1)^2 + 4(p+1)^3}{4} - 1 = \frac{(p+1)^2(p^2 + 4(p+1))}{4} - 1 = \frac{(p+1)^2(p^2 + 4p + 4)}{4} - 1 = \\
&= \frac{(p+1)^2(p+2)^2}{4} - 1 = HL_{p+1}
\end{aligned}$$

Vid tredje likhetstecknet ovan används induktionsantagandet. Vid femte likhetstecknet bryter vi ut $(p+1)^2$. Vi har visat att om $VL_p = HL_p$ så är också $VL_{p+1} = HL_{p+1}$.

1.) och 2.) ovan visar tillsammans att likheten gäller för alla $n \geq 2$, enligt induktionsprincipen.

Svar: Se induktionsbevis ovan.

6. Efter en bilolycka där en bil kört på en fotgängare (som dock klarade sig väl) går polisen igenom vad de vet om olyckan:
- Bilen lämnade bromsspår vid olyckan,
 - Om föraren var rattfull vid olyckan så försvann föraren från platsen omedelbart.
 - Om föraren inte var rattfull och föraren inte somnat så var olyckan avsiktlig.
 - Om det finns bromsspår så försvann inte föraren från platsen omedelbart.
 - Olyckan var inte avsiktlig.

Efter en stunds funderande säger en polis beslutsamt: "Alltså måste föraren ha somnat vid ratten".

Vi inför följande satsparametrar:

p : Bilen lämnade bromsspår vid olyckan.

q : Föraren körde rattfull.

r : Föraren lämnade platsen omedelbart.

s : Föraren har somnat vid ratten.

t : Olyckan var avsiktlig.

Slutledningen ovan blir då som satslogiskt uttryck:

$$p \wedge (q \rightarrow r) \wedge (\neg q \wedge \neg s \rightarrow t) \wedge (p \rightarrow \neg r) \wedge \neg t \Rightarrow s$$

Vi visar att slutledningen är korrekt med hjälp av deduktion:

- | | | |
|------|--------------------------------------|-------------------------------------|
| 1.) | p | Förutsättning |
| 2.) | $p \rightarrow \neg r$ | Förutsättning |
| 3.) | $\neg r$ | 1.), 2.) och modus ponens. |
| 4.) | $q \rightarrow r$ | Förutsättning. |
| 5.) | $\neg q$ | 3.), 4.) och modus tollens. |
| 6.) | $\neg t$ | Förutsättning. |
| 7.) | $\neg q \wedge \neg s \rightarrow t$ | Förutsättning. |
| 8.) | $\neg(\neg q \wedge \neg s)$ | 6.), 7.) och modus tollens. |
| 9.) | $\neg\neg q \vee \neg\neg s$ | 8.) och De Morgans lag. |
| 10.) | $q \vee s$ | 9.) och dubbel negation. |
| 11.) | s | 5.), 10.) och disjunktiv syllogism. |

Vi har härlett slutsatsen s ur förutsättningarna och slutledningen är därmed korrekt. (Slutledningen kan också visas med sanningsvärdestabell eller reduktionsmetoden.)

Svar: Slutledningen är korrekt. Se härledning ovan.

Var god vänd!

7. a) Då G har n noder har ett spännande träd till G enligt satsen för träd $n - 1$ bågar. Vi har m bågar i den ursprungliga grafen, men vill ha $n - 1$, så skillnaden mellan dessa är det antal vi måste ta bort, d v s $m - (n - 1) = m - n + 1$ bågar måste tas bort.
- b) Med n noder blir det i Kruskals algoritim alltid $n - 1$ bågar som ska väljas, oavsett hur många bågar den ursprungliga grafen innehåller. Om antalet bågar från början är $2(n - 1)$ så kommer vi i kantborttagning bli tvugna att ta bort $n - 1$ bågar, d v s lika många som vi väljer i Kruskals. Om antalet bågar från början är färre än $2(n - 1)$ så är kantborttagning effektivare, då det är färre vi tar bort än de vi ska ha kvar. Om antalet bågar från början är fler än $2(n - 1)$ så blir det effektivare med Kruskals då vi behöver ta bort fler än de $n - 1$ bågar som vi väljer med Kruskals. Kort sagt: Kruskals algoritim är effektivare om antalet bågar i den ursprungliga grafen är större än $2(n - 1)$, där n är antalet noder i grafen.

Svar: a) Vi måste ta bort $m - n + 1$ bågar (där n är antalet noder och m antalet bågar i G) för att få ett spännande träd.

b) Kruskals algoritim är effektivare om antalet bågar i den ursprungliga grafen är större än $2(n - 1)$, där n är antalet noder i grafen.