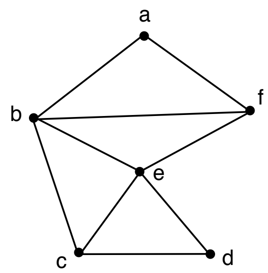
Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Daniel Carlsson

Lösningar till tentamen
TADI31 Diskret matematik, TEN1, 4 hp
2026-03-18

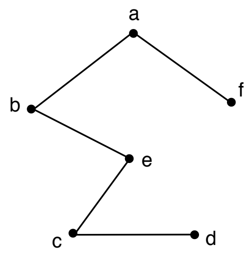
---

1. a) Det finns en hamiltoncykel i grafen, till exempel $a-b-c-d-e-f-a$.



   b) Enligt sats så finns det en sluten eulerväg precis då alla noder har jämnt gradtal och en öppen eulerväg bara om precis två noder har udda gradtal. I denna graf har nod a och d grad 2, nod b och e grad 4 och nod c och f har grad 3. Då de två sista har udda grad finns det alltså en öppen eulerväg, men ej en sluten enligt satsen. Exempel på en öppen eulerväg är $f-a-b-f-e-b-c-d-e-c$.

   c) Ett spännande träd är en delgraf till den ursprungliga grafen som innehåller alla noder och är ett träd. Det finns många möjligheter. En möjlighet är det spännande träd som visas här intill. Antalet löv i detta träd är två stycken, nämligen d och f. (Beroende på vilket spännande träd man väljer kan man få mellan 2 och 4 löv.)



Svar: a) Ja, det finns en hamiltoncykel, t ex $a-b-c-d-e-f-a$.
b) Finns ej sluten eulerväg, men en öppen enligt motivering ovan.
Ett exempel på en öppen eulerväg är: $f-a-b-f-e-b-c-d-e-c$.
c) Se spännande träd ovan. Detta träd har två löv, nämligen d och f.

2. a) Vi kan bestämma SGD(360,1470) med hjälp av Euklides algoritm eller genom primtalsfaktorisering av talen.

   Euklides algoritm ger:

$$\begin{aligned} 1470 &= 4\cdot 360+30 \\ 360 &= 12\cdot 30 \end{aligned}$$

Den sista resten som inte är 0 är den största gemensamma delaren till talen, så vi får $\text{SGD}(360,1470)=30$.

   b) Lös den diofantiska ekvationen $360x+1470y=21240$.
   Med resultatet i a) kan vi förkorta denna ekvation med faktorn 30, vilket ger ekvationen:

$$12x+49y=708$$

   Euklides algoritm för 12 och 49 ger:

$$\begin{aligned} 49 &= 4\cdot 12+1 \\ 12 &= 12\cdot 1 \end{aligned}$$

Vi får $\text{sgd}(12,49)=1$ och då $1\,|\,708$ så finns det lösningar enligt sats.

Var god vänd!

Vi bestämmer en första lösning till ekvationen genom att nysta upp euklides baklänges och därigenom uttrycka 1 i 12 och 49. Vi får:

$1 = 49 - 4 \cdot 12$. Vi har alltså $12 \cdot (-4) + 49 \cdot 1 = 1$. Vi förlänger med 708 och får $12 \cdot (-4 \cdot 708) + 49 \cdot 708 = 708 \;\Leftrightarrow\; 12 \cdot (-2832) + 49 \cdot 708 = 708$.

En första lösning är därmed $(x_0, y_0) = (-2832, 708)$ och samtliga lösningar ges då enligt sats av:

$$\begin{cases} x = -2832 + 49 \cdot n \\ y = 708 - 12 \cdot n \end{cases} \quad \text{där } n \text{ är ett godtyckligt heltal.}$$

c) Vi ska bestämma koefficienten för x^8-termen i utvecklingen av $(x + \frac{1}{x})^{12}$. Binomialsatsen ger:

$$(x + \frac{1}{x})^{12} = \sum_{k=0}^{12} \binom{12}{k} \cdot x^k \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{12-k} = \sum_{k=0}^{12} \binom{12}{k} \cdot x^{2k-12}$$

En x^8-term fås alltså om $2k - 12 = 8 \;\Leftrightarrow\; 2k = 20 \;\Leftrightarrow\; k = 10$.

Om vi plockar ut termen för $k = 10$ ur summan så får vi:

$$\binom{12}{10} \cdot x^{20-12} = \binom{12}{2} \cdot x^8 = \frac{12 \cdot 11}{2 \cdot 1} \cdot x^8 = 6 \cdot 11 \cdot x^8 = 66x^8$$

Svar: a) $\text{SGD}(360, 1470) = 30$.

b) Samtliga lösningar till den diofantiska ekvationen är:

$$\begin{cases} x = -2832 + 49 \cdot n \\ y = 708 - 12 \cdot n \end{cases} \quad \text{där } n \text{ är ett godtyckligt heltal.}$$

c) Koefficienten för x^8-termen är 66.

3. a) Vi visar att $(p \wedge \neg q) \vee \neg r$ inte är logiskt ekvivalent med $(\neg r \to p) \to \neg q$ med hjälp av en sanningsvärdestabell:

p	q	r	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$\neg r$	VL: $(p \wedge \neg q) \vee \neg r$	$\neg r \to p$	$\neg q$	HL: $(\neg r \to p) \to \neg q$
1	1	1	0	0	0	0	1	0	0
1	1	0	0	0	1	1	1	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	0	1	0	0
0	1	0	0	0	1	1	0	0	1
0	0	1	1	0	0	0	1	1	1
0	0	0	1	0	1	1	0	1	1

Vi ser att uttrycken skiljer sig åt på rad 2 och rad 7 i tabellen. Då VL och HL ej har samma sanningsvärdestabell är de **ej** logiskt ekvivalenta.

Var god vänd!

b) *"Om det regnar så badar vi inte. Om det inte regnar så ler solen mot oss. Vi badar. Alltså ler solen mot oss."*

Vi inför följande satser: p : det regnar, q : vi badar, r : solen ler mot oss.

Med dessa kan vi nu skriva slutledningen som ett satslogiskt uttryck:

$$(p \to \neg q) \wedge (\neg p \to r) \wedge q \ \Rightarrow \ r$$

Vi visar att det är en korrekt slutsats med hjälp av deduktion.

1.	q	Förutsättning
2.	$\neg(\neg q)$	1 och dubbel negation.
3.	$p \to \neg q$	Förutsättning
4.	$\neg p$	2, 3 och Modus tollens.
5.	$\neg p \to r$	Förutsättning
6.	r	4, 5 och Modus ponens.

Vi har härlett r ur de givna förutsättningarna. Slutledningen är alltså korrekt.

Svar: a) Uttrycken är ej logiskt ekvivalenta. Se sanningsvärdestabell ovan.
b) Slutledningen är korrekt. Se uttryck och härledning ovan.

4. Hur många olika bokstavsföljder med 7 bokstäver kan man bilda med bokstäverna i ordet PÅSKÄGG?

Då PÅSKÄGG innehåller 7 bokstäver ska alla bokstäver vara med i varje följd. Vi har 6 olika bokstäver och dubbelt av G. 7 Bokstäver kan omordnas på 7! olika sätt, men då två G byter plats fås samma följd, varför vi får dividera med 2. Vi får: $\frac{7!}{2} = 2520$ olika bokstavsföljder med bokstäverna i ordet PÅSKÄGG.

Hur många av dessa bokstavsföljder innehåller varken följden GÅS eller följden SKÅP?

Vi kan räkna ut antalet som innehåller GÅS genom att tänka att dessa sitter ihop (står på en lapp) och ska omordnas med de övriga 4 bokstäverna, som alla är olika. Vi får 5 objekt som ska omordnas vilket ger $5! = \mathbf{120}$ olika bokstavsföljder som innehåller GÅS.

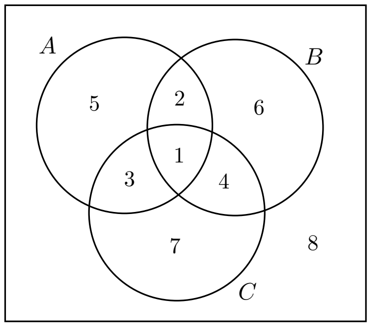
På samma sätt kan vi beräkna antalet som innehåller SKÅP genom att sätta ihop dessa fyra bokstäver och omordna med övriga 3 bokstäver. Här har vi dock två G, varför vi måste dividera antalet följder med 2 för att inte dubbelräkna samma följd när G:na byter plats. Vi får 4 objekt att omordna, vilket då ger: $\frac{4!}{2} = \frac{24}{2} = \mathbf{12}$ olika följder som innehåller SKÅP.

Då både GÅS och SKÅP innehåller bokstaven Å inuti orden kan inte både följden GÅS och SKÅP förekomma samtidigt. Vi kan därför få antalet som varken innehåller GÅS eller SKÅP genom att subtrahera antalen av dessa från det totala antalet ovan, vilket ger: $2520 - 120 - 12 = \mathbf{2388}$.

Svar: Det går att bilda 2520 olika följder med samtliga bokstäver i ordet PÅSKÄGG. Av dessa innehåller 2388 varken GÅS eller SKÅP.

5. a) $A \cap (B \setminus C) = C^c \cap (A \cap B)$

Vi använder ett numrerat venndiagram och går igenom operationerna i vänsterled och högerled var för sig och ser vilka områden de svarar mot.



VL:
A: 1,2,3,5
B: 1,2,4,6
C: 1,3,4,7
$B \setminus C$: 2,6
VL=$A \cap (B \setminus C)$: 2

HL:
C^c: 2,5,6,8
$A \cap B$: 1,2
HL=$C^c \cap (A \cap B)$: 2

Då VL och HL svarar mot samma område i det numrerade venndiagrammet ovan har vi visat att likheten gäller för alla mängder A, B och C.

b) $(B^c \cup A^c) \setminus C = ((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) \cap C^c$

En undersökning visar att vänster- och högerled ger olika områden. Vi ger därför ett motexempel.

Låt $A = B = C = \{a\}$ och $\mathcal{U} = \{a, b, c\}$. Vi får då:

VL= $(B^c \cup A^c) \setminus C = (\{b, c\} \cup \{b, c\}) \setminus \{a\} = \{b, c\} \setminus \{a\} = \{b, c\}$.

HL= $((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) \cap C^c = ((\{a\} \setminus \{a\}) \cup (\{a\} \setminus \{a\})) \cap \{b, c\} =$
$= (\emptyset \cup \emptyset) \cap \{b, c\} = \emptyset \cap \{b, c\} = \emptyset$.

Då VL och HL ger olika mängder i exemplet ovan så gäller inte likheten för alla mängder A, B och C.

Svar: a) Likheten gäller för alla mängder A, B och C, se bevis ovan.
b) Likheten gäller ej för alla mängder A, B och C, se motexempel ovan.

6. a) En godisbutik har lösgodis i fyra olika sorter. På hur många olika sätt kan man köpa en godispåse med 12 bitar fördelat på de fyra sorterna? Då det inte spelar någon roll i vilken ordning vi väljer godisbitarna är det en kombination och då vi får upprepa samma sort flera gånger är det en kombination med upprepning, alltså ett staketproblem. 4 sorter ger 3 staket som ska ges en plats bland totalt $12 + 3 = 15$ platser. Vi får:

$$\binom{12+3}{3} = \binom{15}{3} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 5 \cdot 7 \cdot 13 = 5 \cdot 91 = 455$$

Det finns alltså 455 olika sätt att kombinera 12 godisbitar fördelat på 4 sorter.

b) Geléhallon och hallonbåtar är två av de fyra sorter som finns i butiken. Hur många av påsarna i a) innehåller minst en hallonbåt och max fyra geléhallon?

Vi kan först beräkna de som innehåller minst en hallonbåt genom att välja en hallonbåt och sedan räkna som vi gjorde i a)-uppgiften med de återstående 11 bitarna. Det ger:

$$\binom{11+3}{3} = \binom{14}{3} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 14 \cdot 13 \cdot 2 = 182 \cdot 2 = 364$$

Var god vänd!

Från dessa ska vi nu dra bort de som innehåller fler än fyra geléhallon, alltså de som innehåller 5 geléhallon eller fler. Detta kan vi räkna ut genom att ta en hallonbåt och 5 geléhallon. Återstående 6 godisbitar kan väljas från alla fyra sorterna och ger ett nytt staketproblem med 6 bitar och 3 staket. Vi får:

$$\binom{6+3}{3} = \binom{9}{3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 3 \cdot 4 \cdot 7 = 84$$

Antalet som innehåller minst en hallonbåt och max fyra geléhallon blir då: $364 - 84 = 280$ stycken.

Svar: a) Det går att köpa 12 bitar bland de 4 olika sorterna på 455 olika sätt.
b) 280 av dessa påsar innehåller minst en hallonbåt och max 4 geléhallon.

7. För vilka naturliga tal n gäller att $3 \mid (7^n - 2^n)$?

Vi sätter in $n = 0$, $n = 1$ och så vidare och ser vilka tal som blir delbara med 3.

$n = 0$ ger $7^0 - 2^0 = 1 - 1 = 0$ som är delbart med 3.

$n = 1$ ger $7^1 - 2^1 = 7 - 2 = 5$, som inte är delbart med 3.

$n = 2$ ger $7^2 - 2^2 = 49 - 4 = 45$, som är delbart med 3.

$n = 3$ ger $7^3 - 2^3 = 343 - 8 = 335$, som inte är delbart med 3 (då 333 är det).

Så här långt ser det ut som att $7^n - 2^n$ är delbart med 3 för jämna n, men inte är delbart med 3 för udda värden på n. Vi visar att $3 \mid (7^n - 2^n)$ för alla jämna $n \geq 0$ med hjälp av induktion.

För att underlätta beviset sätter vi $n = 2m$ och visar att $7^{2m} - 2^{2m}$ är delbart med 3 för *alla* $m \geq 0$, då det annars blir svårare att hantera induktionssteget. Vi utvecklar också $7^{2m} - 2^{2m} = 49^m - 4^m$. Det ger följande:

1.) Visa att $3 \mid (49^m - 4^m)$ för startvärde $m = 0$. Vi får $49^0 - 4^0 = 1 - 1 = 0$, som är delbart med 3. Påstående gäller alltså för $m = 0$.

2.) Antag att påstående gäller för något $m = p$, det vill säga att $3 \mid (49^p - 4^p)$.
Visa att då gäller också påståendet för $m = p + 1$, d v s att: $3 \mid 49^{p+1} - 4^{p+1}$

Att 3 delar $49^p - 4^p$ kan uttryckas som att $49^p - 4^p = 3k$, för något heltal k. Antagandet kan uttryckas som att $49^p = 3k + 4p$ för något heltal k. Vi utnyttjar detta antagande i andra likheten nedan och får:

$49^{p+1} - 4^{p+1} = 49 \cdot 49^p - 4 \cdot 4^p = 49(3k + 4^p) - 4 \cdot 4^p = 49 \cdot 3k + 49 \cdot 4^p - 4 \cdot 4^p =$

$= 49 \cdot 3k + 45 \cdot 4^p = 3 \cdot (49k + 15 \cdot 4^p)$.

Att vi kan bryta ut en faktor 3 i sista steget och att $49k + 15 \cdot 4^p$ är ett heltal för heltal k och p visar att $3 \mid 49^{p+1} - 4^{p+1}$, under antagandet att $3 \mid (49^p - 4^p)$.

1.) och 2.) ovan visar att $3 \mid (49^m - 4^m)$ för alla $m \geq 0$, vilket i sin tur innebär att vi visat att $3 \mid (7^n - 2^n)$ för alla jämna värden på n.

Svar: Vi har visat att $3 \mid (7^n - 2^n)$ för alla jämna värden på n med hjälp av induktion.

(Då 7 lämnar resten 1 vid division med 3 och 2 lämnar resten (-1) vid division med 3 så kan man visa att $7^n - 2^n$ lämnar resten $1^n - (-1)^n$, vilket är 0 för jämna n och alltså delbart med 3, men blir 1-(-1)=2 för udda n, vilket inte är delbart med 3. Därför är jämna värden på n verkligen alla värden där $3 \mid (7^n - 2^n)$. Det krävs dock inte i denna uppgift att man visar detta för udda n utan bara att man visar delbarhet för jämna värden på n med induktion.)