

Tentamen
TADI31 Diskret matematik, TEN1, 4 hp
2026-01-13 kl. 8-13

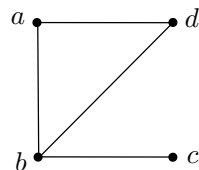
På varje uppgift ges 3 poäng. För betyg 3 krävs sammanlagt minst 8p och att man fått minst 1p på fyra olika uppgifter. För betyg 4 krävs minst 12p och för betyg 5 krävs minst 16p. Lösningarna skall vara **fullständiga** med samtliga steg redovisade och motiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar.

Tillåtna hjälpmedel: Bifogat formelblad i logik. (Räknare ej tillåten.)

Lösningar läggs ut på kurswebbsidan efter skrivtidens slut.

1. a) Gäller $(C \cap \bar{B}) \setminus \bar{A} = (A \cup B) \cap C$ för alla mängder A , B och C ? Bevisa med numererat venndiagram eller ge ett konkret motexempel med högst tre element i grundmängden.
b) Låt $A = \{b, c\}$, $B = \{b, e\}$ och $C = \{a, c, e, f\}$ vara delmängder i grundmängden $\mathcal{U} = \{a, b, c, d, e, f\}$. Beräkna $(\bar{A} \cap B) \setminus C$ och bestäm antalet delmängder till denna mängd.
c) Bestäm antalet delmängder till mängden C som innehåller minst elementet e .

2. a) Figuren intill visar grafen G . Bestäm G 's komplementgraf samt avgör om G och \bar{G} är sammanhängande.

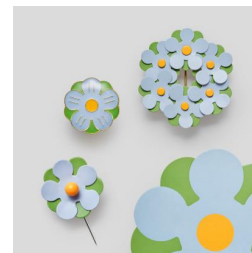


2. b) En graf som är ett träd har 7 noder av grad tre, 8 noder av grad fyra, 6 noder av grad fem och ett visst antal löv. Bestäm utifrån givna satser hur många löv grafen måste innehålla. (Grafisk lösning ger ej poäng.)

3. En butik säljer blockljus, de små kostar 24 kr och de större kostar 70 kr. Du handlar blockljus av de två storlekarna för sammanlagt 610 kr. Ställ upp den diofantiska ekvation som detta ger upphov till och bestäm samtliga lösningar till denna. Bestäm sedan hur många ljus som kan ha köpts av vardera sort. (Du ska visa att du kan hantera en generell lösningsmetod, både när det gäller att ta fram samtliga lösningar samt de specifika lösningarna till det aktuella problemet.)



4. a) Majblomman ges varje år ut i olika färger. Den består av yttre kronblad, inre kronblad samt en pistill i mitten som bilden visar. Hur många olika majblommor kan man bilda om vardera ring av kronblad kan ges 7 färger och pistillen kan ges 5 olika färger?



2. b) Majblomman finns i fyra olika utföranden: som plastblomma på nål, som emalj-pin, som krans och som klistermärke. Om man vill köpa totalt 12 bland dessa 4 produkter, på hur många olika sätt kan man kombinera sorterna?
c) Samma fråga som i b) men med tillägget att vi vill köpa högst 4 kransar.

5. Visa med hjälp av induktion att likheten nedan gäller för alla $n \geq 2$.

$$\sum_{k=2}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} - 1$$

6. Efter en bilolycka där en bil kört på en fotgängare, som dock klarade sig väl, går polisen igenom vad de vet om olyckan:

- Bilen lämnade bromsspår vid olyckan,
- Om föraren var rattfull vid olyckan så försvann föraren från platsen omedelbart.
- Om föraren inte var rattfull och föraren inte somnat så var olyckan avsiktlig.
- Om det finns bromsspår så försvann inte föraren från platsen omedelbart.
- Olyckan var inte avsiktlig.

Efter en stunds funderande säger en polis beslutsamt: "Alltså måste föraren ha somnat vid ratten".

Inför satsparametrar och skriv slutledningen som ett satslogiskt uttryck och avgör sedan med någon metod i kursen om polisens slutsats är korrekt eller ej.

7. a) En enkel och sammanhängande graf G har n noder och m bågar. Ange ett uttryck i n och m för hur många bågar som måste tas bort för att få ett spännande träd till G .
- b) Jämför nu Kruskals algoritm med kantborttagning för en enkel och sammanhängande graf med n noder. För vilket antal bågar (uttryckt i n) i den ursprungliga grafen är det effektivare att använda Kruskals algoritm än kantborttagning, det vill säga för vilket antal bågar får vi färre att välja till med Kruskals än vi tar bort i kantborttagning?