LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen

Utbildningskod: 9GMA05
Modul: STN1

Tentamen i Matematisk Statistik

9GMA05/STN1 2022-03-26

Hjälpmedel: miniräknare (tömda minnen); formelsamling i matematisk statistik (utgiven av MAI).

För godkänd tentamen (3/G) är 15 poäng tillräckligt. Noggrann motivering krävs där alla viktiga detaljer skall motiveras.

För lösningsskisser, se kurshemsidan efter skrivningens slut. Lycka till!

---

1. I ett rum så finns det två giftiga ormar: en brunorm (*Pseudonaja textilis*) och en Gaboonhuggorm (*Bitis gabonica*). Det finns två dörrar in i rummet. Om man går genom rummet från första dörren till andra så är sannolikheten att bli biten av brunormen 0.3, och sannolikheten att bli biten av gaboonhuggormen 0.05 (detta gäller i hela uppgiften).

   (a) Om händelsen att bli biten av båda ormarna när man tar sig genom rummet har sannolikheten 0.01, vad är sannolikheten att bli biten av precis en av ormarna? (2p)

   (b) Om händelserna att bli biten av de olika ormarna är oberoende, vad är sannolikheten att ta sig genom rummet utan att bli biten? (2p)

   (c) Antag att man har tio likadana rum på rad och går genom alla tio rum. Antag vidare att händelserna att bli biten i olika rum är oberoende. Om sannolikheten att bli biten av båda ormarna i ett rum är 0.01, vad är sannolikheten att man tar sig igenom minst 8 av rummen utan att bli biten av någon orm? (2p)

   (d) Via empiriska studier fann man att den betingade sannolikheten att bli biten av brunormen givet att man blir biten av gaboonhuggormen är 0.5. Vad är då den betingade sannolikheten att bli biten av gaboonhuggormen givet att man blir biten av brunormen? (2p)

2. Fulminerande Felicia laborerar med en tillsats av aluminiumpulver till ett ammoniumnitratbaserat explosivämne. Felicia blandar i lite på känsla och är orolig för att innehållet varierar för mycket. Vid en mätning av en följd blandningar fick man följande substansmängd aluminium per 100 gram blandning.

   6.04 4.96 4.93 3.40 7.04 4.73 3.57 7.70 4.55 3.82

   En hjälpsam examinator har räknat ut följande:

   $$\sum_{i=1}^{10} x_i = 50.74, \qquad \sum_{i=1}^{10}(x_i - \overline{x})^2 = 18.7576 \qquad \text{och} \qquad \sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 276.2124.$$

   (a) Antag att mätningarna är ett stickprov på en normalfördelad variabel $X \sim N(\mu, 2)$ (man tycker sig veta så pass mycket om processen att standardavvikelsen anses vara känd). Beräkna ett 99% konfidensintervall för väntevärdet μ. (2p)

(b) Antag att man inte håller med om att standardavvikelsen är känd utan vill att den skattas utifrån datan. Ställ upp ett 99% konfidensintervall för väntevärdet μ då mätningarna är ett stickprov på en normalfördelad variabel $X \sim N(\mu, \sigma)$ och σ är okänd. (2p)

(c) Felicia är orolig att hon har i för lite aluminium och vill undersöka hypotesen $H_0 : \mu = 5.0$ mot $H_1 : \mu > 5.0$ på nivån 95% (antag att σ är okänd). Utför hypotestestet. Kan du dra någon slutsats? (2p)

3. Låt A vara (den fyllda) triangeln med hörn i $(0, 0)$, $(1, 0)$ och $(1, 1)$. Vi definierar en tvådimensionell täthetsfunktion enligt

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} c, & \text{punkten } (x, y) \text{ ligger i } A, \\ 0, & \text{för övrigt,} \end{cases}$$

där c är en konstant. Med andra ord är sannolikheten likformigt fördelad på triangeln.

(a) Bestäm konstanten c så att $f_{X,Y}(x, y)$ blir en täthetsfunktion. (2p)

(b) Bestäm $P(X > 1/2)$ och $P(Y > X)$. (4p)

4. (a) Låt $X_1 \sim N(1, \sqrt{2})$, $X_2 \sim N(-1, \sqrt{2})$, och $X_3 \sim N(0, 1)$, vara oberoende stokastiska variabler. Beräkna $P(X_1 + X_2 - X_3 \leq \frac{2}{5})$. (2p)

(b) Låt X_i, $i = 1, 2, \ldots$, vara en följd av oberoende stokastiska variabler med $E(X_i) = 1$ och $V(X_i) = 4$ och definiera $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ för $n = 1, 2, 3, \ldots$

i. Hur många termer måste man ta med i medelvärdet för att få $V(\overline{X}) < \dfrac{1}{10}$? (1p)

ii. Beräkna $P(\overline{X} > 0.75)$ om $n = 50$. (3p)

5. Lömske Lennart planerar att mörda en bekant genom att förmedla ett preparat som orsakar genmutationer och därmed cancer på sikt. För att testa funktionaliteten så ger Lennart 100 personer en viss dos av preparatet och samlar sedan in prover efter en viss tid som han kan smyganalysera på sitt arbete på ett läkemedelsföretag. I dessa 100 prover så finner Lennart följande frekvensdata för antalet mutationer i en viss gensekvens (frekvens innebär hur många av de 100 som hade ett visst antal mutationer).

Antal mutationer	0	1	2	3	4
Frekvens	38	33	26	2	1

Lennart vill testa om denna data är Po(1)-fördelad (Poissonfördelad med väntevärde 1). Använd ett lämpligt test på nivån 1% för att svara på frågan. (4p)

6. Låt $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vara ett stickprov av storleken $n > 2$ av oberoende observationer från en stokastisk variabel X med $E(X) = \mu$ och $V(X) = \sigma^2$. Låt oss skatta väntevärdet μ med två olika skattningar:

$$\widehat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \qquad \text{och} \qquad \mu^* = \frac{x_1 + x_n}{2}.$$

Motivera svaren på följande frågor noggrant:

(a) Visa att båda skattningarna är väntevärdesriktiga. (2p)

(b) Vilken skattning är mest effektiv? (2p)

(c) Är någon av skattningarna konsistent? (2p)