LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen

Utbildningskod: TAIU06
Modul: TENA

Tentamen i Matematisk Statistik

TAIU06/TENA 2022-06-08

Hjälpmedel: miniräknare (tömda minnen); formelsamling i matematisk statistik (utgiven av MAI).

För godkänd tentamen (3/G) är 15 poäng tillräckligt. Noggrann motivering krävs där alla viktiga detaljer skall motiveras.

För lösningsskisser, se kurshemsidan efter skrivningens slut. Lycka till!

---

1. Misantropiske Mikael planerar att sabotera brobyggen han arbetar med. Genom att ändra i ingenjörernas kalkyler så kan Mikael öka risken för brokollaps när bron belastas. Låt B vara händelsen att en viss bro kollapsar (samma för alla broar). Eftersom Mikael inte vågar ta i för mycket när han ändrar i kalkylerna så har han även en extra plan där han genom att tillsätta vissa kemikalier till cementen tror sig kunna öka risken för kollaps. Problemet (för Mikael) är att Mikael inte alltid har möjlighet att göra detta. Låt A vara händelsen att Mikael lyckas tillsätta kemikalien vid ett brobygge. Antag att $P(A) = 0.3$ och $P(B \mid A) = 0.4$.

   (a) Beräkna $P(A \cap B)$. (2p)

   (b) Mikael har under ett år arbetat med sju broar. Vad är sannolikheten att både A och B inträffar i högst tre av försöken? (2p)

   (c) Om Mikael istället upprepar sitt sabotage tills dess att A och B inträffar samtidigt för första gången, vad är sannolikheten att detta tar högst 2 upprepningar? (2p)

   (d) Är det möjligt att A och B är oberoende? Bevisa eller motbevisa. (2p)

2. Tobaksodlaren Tova har planer på att lägga till ett steg i kureringen för tobaksbladen, men hon är orolig att det ska ändra nikotininnehållet för mycket. Tova gör en undersökning på fem olika skördar och kommer fram till följande. Här är x_i nikotininnehåll före behandlingen och y_i efter behandling (enhet: gram per kilogram tobaksblad)

x_i	11.80	11.88	13.49	13.41	13.42
y_i	8.69	9.57	10.34	13.58	12.77

   Antag att mätningarna består av observationer av stokastiska variabler $X_i \sim \mathrm{N}(\mu_i, \sigma)$ och $Y_i \sim \mathrm{N}(\mu_i + \Delta, \sigma)$ där olika skördar anses oberoende av varandra.

   (a) Ange en punktskattning för Δ. (1p)

   (b) Finn ett dubbelsidigt konfidensintervall, med konfidensgrad 90%, för Δ. (3p)

   (c) Kan man förkasta hypotesen $H_0 : \Delta = 0$ med mothypotesen $H_1 : \Delta < 0$ på nivån 10%? Tolkning? (2p)

3. Låt A vara (den fyllda) rektangeln med hörn i $(x = 0, y = 0)$, $(x = 4, y = 3)$. Vi definierar en tvådimensionell täthetsfunktion enligt

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} c, & \text{punkten } (x, y) \text{ ligger i } A, \\ 0, & \text{för övrigt}, \end{cases}$$

där c är en konstant. Med andra ord är sannolikheten likformigt fördelad på rektangeln.

(a) Bestäm konstanten c så att $f_{X,Y}(x, y)$ blir en täthetsfunktion. (1p)

(b) Bestäm $P(X > 3)$, $P(Y > 3)$ och $P(X > Y)$. (5p)

4. En fullt rimlig fråga är vilket av Morbid Angels första 7 studioalbum som är bäst (vi ignorerar live-album och Abominations of Desolation-plattan[1]). Följande data samlades in från internet.

Albumtitel	Websida	
	Nuclear War Now!	Metalstorm.net
Altars of Madness	67	82
Blessed Are The Sick	18	34
Covenant	11	32
Domination	1	21
Formulas Fatal To The Flesh	6	4
Gateways to Annihilation	1	10
Heretic	0	2

Använd ett lämpligt test med signifikansnivå 0.01 för att undersöka om det finns en skillnad mellan åsikterna på de två sidorna. (4p)

5. Låt $Y \sim \mathrm{N}(4, 2)$ och definiera den stokastiska variabeln X enligt

$$X = \begin{cases} -1, & Y < 0, \\ 0, & 0 \leq Y < 3, \\ 1, & 3 \leq Y < 5, \\ 2, & 5 \leq Y < 6, \\ 3, & Y \geq 6. \end{cases}$$

(a) Bestäm sannolikhetsfunktionen p_X för X. (4p)

(b) Finn $E(X)$ och $V(X)$. (2p)

6. Låt $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vara ett stickprov från en fördelning med täthetsfunktion $f(x) = \theta\, e^{\theta x}$ för $x \geq 0$, med en okänd parameter θ.

(a) Hitta ML-skattningen $\widehat{\theta}$ för θ. (4p)

(b) Visa att $1/\widehat{\theta}$ är en väntevärdesriktig skattning av $1/\theta$. (2p)

[1] Eftersom den givetvis är bäst.