LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen

Utbildningskod: TAIU06
Modul: TENA

Tentamen i Matematisk Statistik

TAIU06/TENA 2022-08-16

Hjälpmedel: miniräknare (tömda minnen); formelsamling i matematisk statistik (utgiven av MAI).

För godkänd tentamen (3/G) är 15 poäng tillräckligt. Noggrann motivering krävs där alla viktiga detaljer skall motiveras.

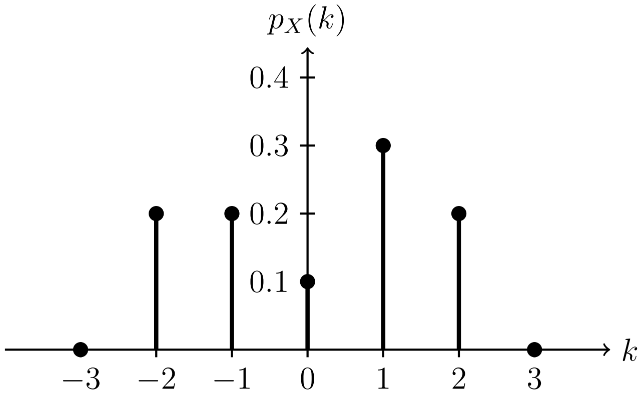
För lösningsskisser, se kurshemsidan efter skrivningens slut. Lycka till!

---

1. Vid ett slumpförsök undersöker man tre händelser: A, B och C. Man vet att sannolikheterna $P(A) = P(B) = 0.6$ och att $P(A \cap B) = P(A \cap C) = 0.2$ samt $P(B \cap C) = 0.3$. Vidare är $A \cap C$ och $B \cap C$ oberoende.
   (a) Beräkna sannolikheten att alla tre händelser inträffar: $P(A \cap B \cap C)$. (2p)
   (b) Beräkna sannolikheten att *endast* A inträffar. (2p)
   (c) Vi upprepar slumpförsöket (oberoende) åtta gånger. Vad är sannolikheten att B inträffar fler än sex gånger? (2p)

2. I en telefonundersökning tillfrågas personer om det är lämpligt att ha komodovaraner som husdjur i lägenhet. Personerna i undersökningen har valts ut slumpmässigt.
   (a) Vid tillfället frågade man 360 personer, och av dessa tyckte 18 stycken att det var okej. Hitta ett 95% konfidensintervall för andelen av befolkningen som tycker det är okej. (4p)
   (b) Låt $[0.039, 0.062]$ vara ett 99% konfidensintervall för andelen vid en liknande undersökning som tyckt det är okej med komodovaraner i sin lägenhet. Ange en lämplig punktskattning för den verkliga andelen av befolkningen som tycker det är okej. Motivera ditt svar! (2p)

3. Motivera svaren på följande frågor noggrant!
   (a) I en urna finns 10 kulor, 4 vita och 6 röda. Om man väljer ut 3 kulor (utan återläggning) och låter X vara antalet vita kulor bland dessa, varför blir inte X binomialfördelad? Motivera kortfattat. (1p)
   (b) Låt X vara en stokastisk variabel med sannolikhetsfunktionen p_X given i figuren nedan. Visa att p_X är en sannolikhetsfunktion samt beräkna $E(X)$ och $E(X^2)$. (3p)



(c) Avgör vilka funktioner nedan som är sannolikhetsfunktioner eller inte. Motivera! (2p)

i. $p_X(k) = k/10$ för $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

ii. $p_X(k) = (k+2)/10$ för $k = -1, 0, 1$.

iii. $p_X(k) = k/5$ för $k = -1, 0, 1, 2, 3$.

4. Låt $X \sim N(1, 5)$ och $Y \sim N(-1, 4)$, där $V(X) = 25$ och $V(Y) = 16$, vara oberoende.

(a) Bestäm sannolikheten $P(X < 1, Y > 0)$. (2p)

(b) Bestäm sannolikheten $P(X + 2Y > 0)$. (2p)

(c) Låt $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$, där $X_k \sim N(\mu, \sigma)$ är oberoende för $k = 1, 2, \ldots, n$. Om vi vet att standardavvikelsen $\sigma \leq 2$, vad är det minsta heltalet n så att $V(\overline{X}) < 0.1$ säkert är uppfyllt? (2p)

5. Crawford Tillinghast behöver en större mängd kraftigt förstärkta elektroniska resonansrör till sitt projekt att kunna se in i högre dimensioner. Den något skumma säljaren som Crawford fått tag i hävdar att livslängden är exponentialfördelad med väntevärde 2 år (observera enheten). Crawford börjar med att köpa 50 stycken komponenter för att testa detta påstående. Crawford kopplar in rören i ett parallellt system och tittar till var 6:e timme för att se hur många som gått sönder.

Följande tabell beskriver hur många resonansrör som gick sönder i vissa tidsintervall (alla har inte längden 6 timmar).

Tidsintervall	Hur många slutar fungera i just detta intervall
$I_1 = [0,\ 6)$	11
$I_2 = [6,\ 12)$	8
$I_3 = [12,\ 24)$	12
$I_4 = [24,\ 36)$	8
$I_5 = [36,\ \infty)$	11

(a) Om vi antar att livslängden för ett rör är exponentialfördelad med väntevärde 2 år, vad är sannolikheterna för att ett visst rör går sönder i I_1 respektive i I_4? (2p)

(b) Undersök om antagandet om exponentialfördelningen är rimligt på approximativt 1% nivån. (4p)

6. I en stor (oändlig) mängd förekommer en viss egenskap med sannolikhet p för ett slumpmässigt utvalt element. Om vi väljer ut n stycken element ur mängden brukar vi som bekant skatta p med hjälp av den stokastiska variabeln $\widehat{P} = \frac{X}{n}$ där $X \sim \text{Bin}(n, p)$.

   (a) Visa att $\widehat{P}$ är en väntevärdesriktig skattning av p. (1p)

   (b) Visa att $\frac{X^2}{n^2}$ är en skattning av p^2 och undersök sedan hurvida den är väntevärdesriktig. Motivera dina svar ordentligt! (3p)

   (c) Undersök om $\frac{X^2}{n^2}$ är en asymptotiskt väntevärdesriktig skattning av p^2, dvs undersök om

$$\lim_{n\to\infty} E(X^2/n^2) = p^2.$$

(2p)