

Tentamen i Matematisk Statistik

TAIU06/9GMA05/TENA/STN1 2022-xx-yy

Hjälpmedel: miniräknare (tömda minnen); formelsamling i matematisk statistik (utgiven av MAI).

För godkänd tentamen (3/G) är 15 poäng tillräckligt. Noggrann motivering krävs där alla viktiga detaljer skall motiveras.

För lösningsskisser, se kurshemsidan efter skrivningens slut. Lycka till!

1. Lina är på resa i sydamerika och studerar grodor vid ett flodsystem. Det visar sig att i just detta ekosystem så är sannolikheten ganska hög att grodorna producerar ett potent gift i sin hud. Med tanke på det tropiska klimatet är det också ganska hög sannolikhet att Lina drar på sig någon slags infektion. Lina studerar en viss giftig grodart och råkar komma åt skinnet med sin hud. Låt A vara händelsen att denna sort är tillräckligt giftig för att Lina ska bli förgiftad och B vara händelsen att Lina bär på en infektion. Antag vidare att $P(A \cup B) = 0.6$ och $P(A \cap B) = 0.3$.
 - (a) Vilka värden kan summan $P(A) + P(B)$ anta? (2p)
 - (b) Antag vidare att $P(A) = 0.4$. Beräkna sannolikheten för A givet att Lina inte bär på en infektion. (2p)
 - (c) Antag att $P(B^*) \neq 0$ och att sannolikheten för A givet att Lina inte bär på en infektion är $P(A)$. Är A och B oberoende i detta fall? (2p)
2.
 - (a) Vid 16 upprepade mätningar av en process fann man att medelvärdet blev $\bar{x} = 21$ och stickprovsvariansen $s_x^2 = 7.2$. Antag att mätningarna är observationer av en stokastisk variabel $X \sim N(\mu, \sigma)$. Konstruera ett 99% konfidensintervall för väntevärdet μ . (2p)
 - (b) På grund av hur processen ser ut vet man att det verkliga värdet för σ^2 är $\sigma^2 = 7.0$. Konstruera ett 99% konfidensintervall för μ där vi utnyttjar vad vi vet om σ . (2p)
 - (c) Testa hypotesen $H_0 : \mu = 20$ på nivån 1% med mothypotesen $H_1 : \mu > 20$. (2p)
3. Låt (X, Y) vara en diskret tvådimensionell s.v. där X och Y är oberoende och $p_{X,Y}(j, k) = 0$ om $j < 0, j > 2, k < 0$ eller $k > 2$. För övriga värden på j och k ges sannolikhetsfunktionen av

j/k	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$
$j = 0$	0.06	0.12	0.12
$j = 1$	0.08	?	?
$j = 2$	?	?	?

- (a) Räkna ut vad det måste stå där det finns frågetecken. Motivera! (4p)
- (b) Beräkna sannolikheten $P(X + Y < 2)$. (2p)

4. (a) Låt X vara en s.v. med täthetsfunktion

$$f_X(x) = \begin{cases} 3x(2-x)/4, & 0 \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{för övrigt.} \end{cases}$$

Visa att $f_X(x)$ är en täthetsfunktion och beräkna $E(X)$ samt $V(X)$. (4p)

- (b) Låt Y vara en summa av 100 stycken oberoende variabler med samma täthetsfunktioner som $f_X(x)$ i deluppgift (a). Bestäm approximativt sannolikheten att $Y < 105$. (2p)

5. Kalle Kanon har varit och köpt budget-ammunition som tillverkaren hävdar har 1% felrisk (risken att få en blindgångare). Kalle planerar att testa tillverkarens påstående genom att skjuta 1000 stycken slumpmässigt utvalda kulor. Vi antar att Kalles vapen är felfritt och fungerar perfekt samt att Kalle inte har några problem med koncentrationen vid upprepande sysselsättning

- (a) Antag att tillverkaren har rätt och felrisken är $p = 0.01$. Beräkna approximativt sannolikheten för precis 10 blindgångare vid Kalles test. Vad blir approximativt sannolikheten att Kalle finner färre än 20 stycken blindgångare? (3p)

- (b) Vid Kalles test fann han 22 stycken blindgångare. Använd detta för att finna ett approximativt 95% konfidensintervall för den verkliga felrisken p . Vad kan du dra för slutsats angående företagets påstående om 1% felrisk? (3p)

6. Vi låter $f(x; \theta)$ vara täthetsfunktionen för gammafördelningen (med okänd parameter θ),

$$f(x; \theta) = \frac{\theta(\theta x)^{v-1} e^{-\theta x}}{\Gamma(v)},$$

för $x > 0$ och $v > 0$. I vårt fall antar vi att v är ett heltal $v \geq 1$. Funktionen $\Gamma(v)$ är kan då beräknas enligt $\Gamma(v) = (v-1)!$.

- (a) Finn ML-skattningen $\hat{\theta}$ av θ . (4p)

- (b) Visa att skattningen $1/\hat{\theta}$ är en väntevärdesriktig skattning av $1/\theta$. *Tips: om X är gammafördelad enligt ovan så är $E(X) = v/\theta$.* (2p)