Linköpings tekniska högskola
Matematiska institutionen
Vitalij Tjatyrko

Kurskod: TAIU08
Provkod: TEN1

Tentamen i Matematik TAIU08/TEN1 (Flervariabelanalys)
2024-11-01 kl 08-13

Inga hjälpmedel tillåtna.
Uppgifterna bedöms med 0-3 poäng.
15-18 poäng ger betyg 5, 11-14 poäng 4, 8-10 poäng 3.
Resultatet kommer inom två veckor.

1. Bestäm Taylorpolynom P_1 och P_2 av ordning 1 och 2 i punkten (1,2) till funktionen $f(x,y) = x^3y^2 - 2xy + y^2 - 4x + 1$.

   Använd $h = x - 1$ och $k = y - 2$ för att skriva ner polynomen.

2. Lös ekv $z''_{xx} - z''_{yy} = 4(x-y)$ genom att införa nya variabler $u = x - y$ och $v = x + y$.

3. Sök alla lokalla maximi- och minimipunkter för

   $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x + y^3 - 15y + 1$.

   Motivera fullständigt när det gäller kvadratiska former.

4. Bestäm största och minsta värden av funktionen $f(x,y) = x^3y$

   på kurvan $3x^4 + y^4 = 4$ ("en ellips") samt motsvarande extrempunkter.

   Tips: Observera ett bivillkor.

5. Beräkna integralen $\int_0^1 (\int_x^1 sin(y^2)dy)dx$

6. Finn volymen av kroppen som begränsas av ytorna $|x| + |y| = 1$, $3x + 2y + z = 10$ och $z = 0$.

1. $f(x,y) = x^3 \cdot y^2 - 2xy + y^2 - 4x + 1, \quad P(1,2)$

$P_1, P_2 = ?$

$f(1,2) = \underbrace{1^3 \cdot 2^2}_{4} - \underbrace{2\cdot 1\cdot 2}_{-4} + \underbrace{2^2}_{4} - 4\cdot 1 + 1 = \underline{\underline{1}}$

$f'_x = 3x^2 \cdot y^2 - 2y - 4, \quad f'_x(1,2) = 3\cdot 1\cdot 2^2 - \underbrace{2\cdot 2 - 4}_{-8} = \underline{\underline{4}}$

$f'_y = 2x^3 y - 2x + 2y, \quad f'_y(1,2) = \underbrace{2\cdot 1\cdot 2}_{4} - 2\cdot 1 + \underbrace{2\cdot 2}_{4} = \underline{\underline{6}}$

$f''_{xx} = (f'_x)'_x = 6xy^2; \quad f''_{xx}(1,2) = 6\cdot 1\cdot 2^2 = \underline{24}$

$f''_{xy} = (f'_x)'_y = 6x^2 y - 2; \quad f''_{xy}(1,2) = 6\cdot 1\cdot 2 - 2 = \underline{10}$

$f''_{yy} = (f'_y)'_y = 2x^3 + 2, \quad f''_{yy}(1,2) = 2\cdot 1 + 2 = \underline{4}$

$\underline{P_1 = 1 + 4\cdot h + 6k}$

$P_2 = P_1 + \frac{1}{2}\left(24h^2 + 2\cdot 10\cdot hk + 4k^2\right) =$

$\underline{= 1 + 4h + 6k + 12h^2 + 10hk + 2k^2}$

2. $z''_{xx} - z''_{yy} = 4(x-y)$, Inför $u = x-y, \; V = x+y$

$z'_x = z'_u \cdot \overset{=1}{u'_x} + z'_v \cdot \overset{=1}{v'_x}, \qquad u'_x = 1, \; u'_y = -1$

$z'_y = z'_u \cdot \overset{=-1}{u'_y} + z'_v \cdot \overset{=1}{v'_y}, \qquad v'_x = 1, \; v'_y = 1$

$$z'_x = z'_u \cdot 1 + z'_v \cdot 1 = z'_u + z'_v$$

$$z''_{xx} = \left(z'_u + z'_v\right)'_x = \left(z''_{uu} \cdot 1 + z''_{uv} \cdot 1\right) + z''_{vu} \cdot 1 + z''_{vv} \cdot 1$$

$$= \underline{z''_{uu} + 2z''_{uv} + z''_{vv}}$$

$$z'_y = z'_u \cdot (-1) + z'_v \cdot 1 = -z'_u + z'_v;$$

$$z''_{yy} = -\left(z''_{uu}(-1) + z''_{uv} \cdot 1\right) + \left(z''_{vu}\right) \cdot (-1) + z''_{vv} \cdot 1 =$$

$$= \underline{z''_{uu} - 2z''_{uv} + z''_{vv}} \Rightarrow$$

Insätt:

$$z''_{uu} + 2z''_{uv} + z''_{vv} - \left(z''_{uu} - 2z''_{uv} + z''_{vv}\right) = 4u$$

$$4z''_{uv} = 4u \quad \text{eller} \quad \boxed{z''_{uv} = u}$$

$$(z'_u)'_v = u \quad \text{Integrera:} \quad z'_u = \int (z'_u)'_v \, dv =$$

$$= \int u \, dv = \underline{u \cdot v + c(u)}$$

$$z = \int z'_u \, du = \int \left(u \cdot v + c(u)\right) du = v \cdot \frac{u^2}{2} + A(u) + d(v)$$

där $A' = c$

$$\underline{z(x,y) = (x+y) \cdot \frac{(x-y)^2}{2} + A(x-y) + d(x+y)}$$

(3) $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x + y^3 - 15y + 1$

Lok. undersökning.

(a)
$$\begin{cases} f'_x = 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 & (1) \\ f'_y = 6xy + 3y^2 - 15 = 0 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$3x^2 = 6xy$

$x^2 - 2xy = 0$

$\underline{x(x-2y) = 0}$

Fall $x=0$ $(1) \Rightarrow 3y^2-15=0 \Leftrightarrow y^2=5 \Leftrightarrow y=\pm\sqrt{5}$

$\Rightarrow P_1(0,\sqrt{5}),\ P_2(0,-\sqrt{5})$

Fall $x=2y$ $(1) \Rightarrow 3(2y)^2+3y^2-15=0 \Leftrightarrow y^2=1 \Leftrightarrow y=\pm 1$

$\Rightarrow P_3(2,1),\ P_4(-2,-1).$

(b) P: $Q(h,k)=f''_{xx}(P)h^2+2f''_{xy}(P)hk+f''_{yy}(P)k^2$

	P_1	P_2	P_3	P_4
$f''_{xx}=6x$	0	0	12	-12
$f''_{xy}=6y$	$6\sqrt{5}$	$-6\sqrt{5}$	6	-6
$f''_{yy}=6x+6y$	$0+6\sqrt{5}$	$0-6\sqrt{5}$	$6+12=18$	$-6-12=-18$

P_1: $Q_1(h,k)=2\cdot 6\sqrt{5}\cdot hk+6\sqrt{5}k^2=6\sqrt{5}(2hk+k^2)=$

$=6\sqrt{5}((k+h)^2-h^2)$ indef., P_1 är en sadelpunkt

P_2: $Q(h,k)=-2\cdot 6\sqrt{5}hk-6\sqrt{5}k^2=-6\sqrt{5}(2hk+k^2)$

$=-6\sqrt{5}((k+h)^2-h^2)$ indef, P_2 är en sadelpunkt.

P_3: $Q(h,k)=12h^2+12hk+18k^2=3(4h^2+4hk+6k^2)=$

$=3((2h+k)^2-k^2+6k^2)=3(2h+k)^2+15k^2$, pos. def.

P_3 är en strang lok. minimipunkt.

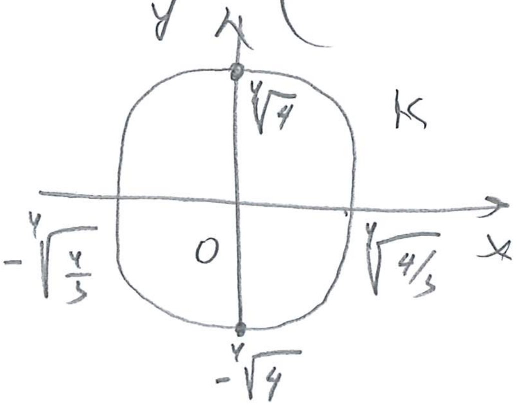
P_4: $Q(h,k)=-(12h^2+12hk+18k^2)=-3(2h+k)^2-15k^2$,

neg. definit, P_4 är en strang lok. maximipunkt.

4 $f(x,y) = x^3 \cdot y \longrightarrow$ max/min

på kurvan K : $\underbrace{3x^4+y^4}_{g(x,y)}=4$ (en "ellips")

Obs $\left\{\begin{array}{l} K \text{ är kompakt} \\ f \text{ är kontinuerlig} \end{array}\right. \Rightarrow f$ har max/min



Kandidatpunkter:

$$\left\{\begin{array}{l} Df, Dg \text{ är lin. beroende} \\ g = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} \begin{vmatrix} f'_x & f'_y \\ g'_x & g'_y \end{vmatrix} = 0 \\ g = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \begin{vmatrix} 3x^2 \cdot y & x^3 \\ 12x^3 & 4y^3 \end{vmatrix} = 0 \\ g = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 12x^2y^4 - 12x^6 = 0 \\ 3x^4+y^4 = 4 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x^2(y^4-x^4)=0 & (1) \\ 3x^4+y^4=4 & (2) \end{array}\right.$$

$(1) \Rightarrow x=0$ o $y=\pm x$

Insättning i (2) ger

om $x=0$ så är $y=\pm\sqrt{2} \Rightarrow P_1(0,\sqrt{2}), P_2(0,-\sqrt{2})$.

om $y=x$ så är $x=\pm 1 \Rightarrow P_3(1,1), P_4(-1,-1)$

om $y=-x$ så är $x=\pm 1 \Rightarrow P_5(-1,1), P_6(1,-1)$

Beräkna värdena o välj max/min:

$f(P_1) = f(P_2) = \underline{0}$, $\quad f(P_5) = 1\cdot(-1) = -1$

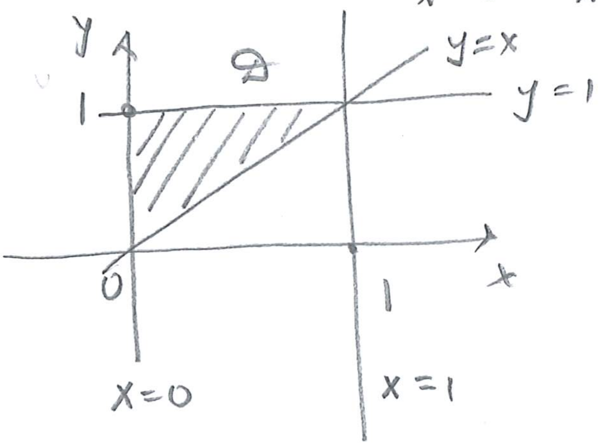
$f(P_3) = 1\cdot 1 = \underline{1}$, $\quad f(P_6) = (-1)^3\cdot 1 = -1$

$f(P_4) = (-1)(-1) = \underline{1}$,

$\max\limits_K f = \underline{1}$ antas i $\underline{P_3 \text{ o } P_4}$

$\min\limits_K f = -1$ antas i $\underline{P_5 \text{ o } P_6}$

(5) Beräkna $\displaystyle\int_{x=0}^{x=1}\left(\int_{x=y}^{1=y}\sin(y^2)\,dy\right)dx = I$



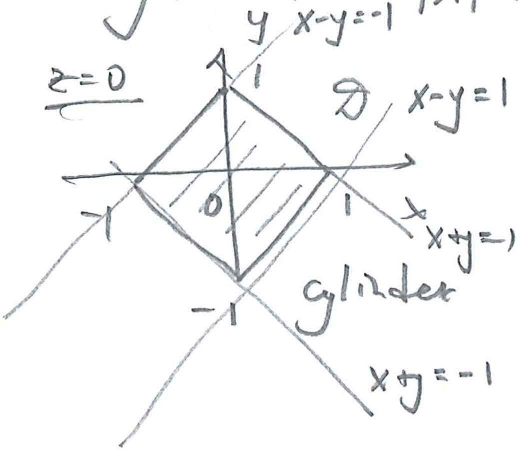
$$I = \iint_D \sin(y^2)\,dx\,dy = \int_0^1\left(\int_0^y \sin(y^2)\,dx\right)dy =$$

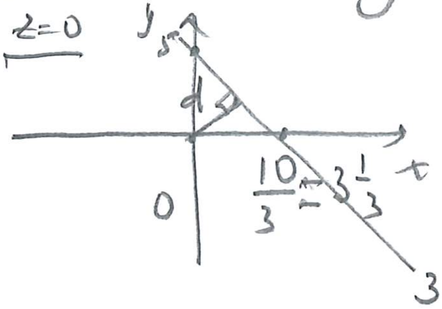
$$= \int_0^1 \sin(y^2)\left(\int_0^y dx\right)dy = \int_0^1 y\cdot\sin(y)^2\,dy = \left|\begin{array}{l} t = y^2 \\ dt = 2y\,dy \end{array}\right| \quad y\,dy = \frac{dt}{2}$$

$$= \int_{y=0}^{y=1}\sin t\cdot\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}(-\cos t)\Big|_{y=0}^{y=1} =$$

$$= -\frac{1}{2}\cos(y^2)\Big|_0^1 = -\frac{1}{2}\left(\cos 1 - \cos 0\right) = \underline{\frac{1}{2}(1-\cos 1)}$$

6 Volym av kroppen begränsad av ytorna $|x|+|y|=1$, $3x+2y+z=10$, $z=0$





$x=0,\ y=5$

$y=0,\ x=\frac{10}{3}$

$3x+2y=10$ eller

$3x+2y-10=0$

Avstånd mellan origo o linjen är $\frac{10}{\sqrt{9+4}}=\frac{10}{\sqrt{13}}>2$

$$V=\iint_{D}\left(\int_0^{10-3x-2y}1\,dz\right)dx\,dy=$$

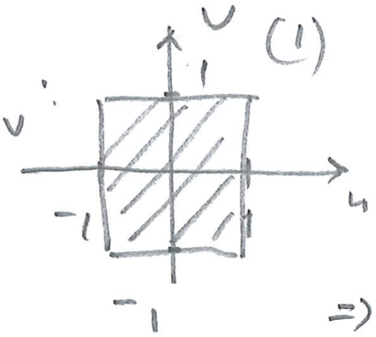
$$=\iint_{D}(10-3x-2y)\,dx\,dy.$$

Variabelbyte $\begin{cases}u=x+y\\ v=x-y\end{cases}$ $\quad\frac{\partial uv}{\partial xy}=\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}$

$\frac{duv}{dxy}=-2$

(2) $\frac{dxy}{duv}=\frac{1}{2}\Leftarrow$

D_{uv}: (1)



(3) $2x=u+v,\ 2y=u-v$

$$\Rightarrow 10-3x-2y=10-\frac{3(u+v)}{2}-(u-v)=$$

$$=10-\frac{5u}{2}-\frac{v}{2}$$

$$\Rightarrow V=\iint_{D_{uv}}\left(10-\frac{5}{2}u-\frac{v}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}\,du\,dv=\underbrace{\iint_{D_{uv}}5\,du\,dv}_{5\cdot 2^2=20}-\underbrace{\frac{1}{2}\iint_{D_{uv}}(5u+v)\,du\,dv}_{I}$$

$$I=6\iint_{D_{uv}}u\,du\,dv=6\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1}u\,dv\right)du=6\int_{-1}^{1}u\cdot 2\,du=6\cdot\frac{u^2}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}\Big|_{-1}^{1}=0$$

$\Rightarrow$ Svar: $\underline{20}$