LINKÖPINGS TEKNISKA HÖGSKOLA
Matematiska institutionen
Vitalij Tjatyrko

KURSKOD: TAIU08
Provkod: TEN1

TENTAMEN I MATEMATIK TAIU08/TEN1 (FLERVARIABELANALYS)

2025-01-09 KL 14-19

Inga hjälpmedel tillåtna.
Uppgifterna bedöms med 0-3 poäng.
15-18 poäng ger betyg 5, 11-14 poäng 4, 8-10 poäng 3.
Resultatet kommer inom två veckor.

1. Bestäm ekvationer för alla linjer som tangerar ellipsen $x^2 + xy + y^2 = 1$ och som går genom punkten $P(0, 2)$.

2. (a) Lös ekvationen $f''_{xy} = xy$ (1p)
   (b) Transformera uttrycket $U = z''_{xy}$ till nya variabler $u = x$ och $v = \frac{x}{y}$ (2p).

3. Betrakta funktionen $f(x, y) = 3x^2 - 3y^2 + 2y^3 - 6xy - 2$.
   (i) Finn alla stationära punkter till f (1p)
   (ii) Avgör pukternas karaktär. (2p)
   Motivera fullständigt när det gäller kvadratiska former.

4. Bestäm största och minsta värdet av $f(x, y) = xy^2$
   på kurvan $x^4 + 2y^4 = 48$ ("en ellips").
   Tips. Observera ett bivillkor.

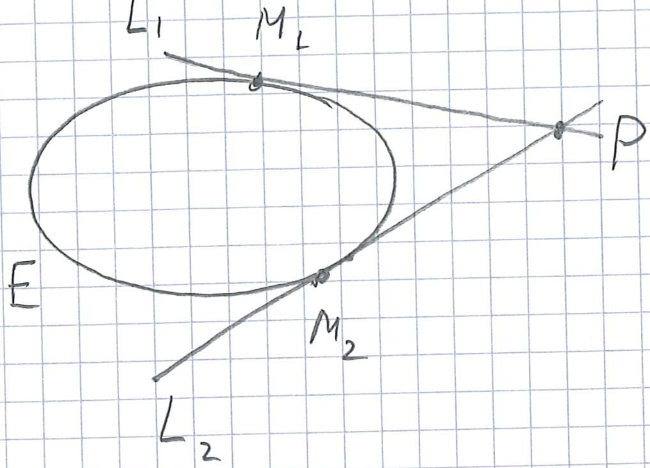
5. Beräkna $\int\int_D (3x + 2y) \cdot \cos(8x)\, dxdy$,
   där D ges av olikheterna $-1 \le 3x + 2y \le 1$, $0 \le 5x - 2y \le 1$.

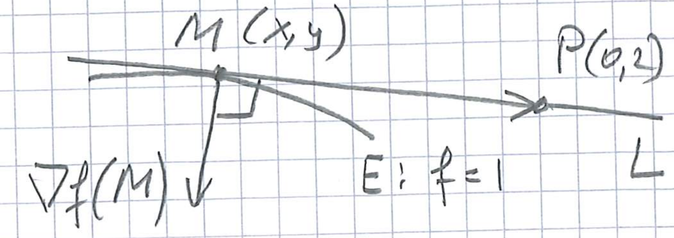
6. Beräkna volymen av den kropp som avgränsas av ytorna
   $x^2 + y^2 - z = 0$, $5x^2 + 5y^2 - z = 0$, $y - x = 0$, $y^2 - x = 0$.

①

① $E: x^2 + xy + y^2 = 1$ (en ellips), $P(0,2)$

Obs $P \notin E$ ty $0^2 + 0\cdot 2 + 2^2 \neq 1$ (även $y > 1$)





Inför $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$

$\nabla f = (2x+y,\ x+2y)$

Sammanfatta: $\begin{cases} M \in E \\ \nabla f(M) \perp \overline{MP} = (-x,\ 2-y) \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 1 \\ (2x+y,\ x+2y)\cdot(-x,\ 2-y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 1 \\ (2x+y)\cdot(-x) + (x+2y)\cdot(2-y) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 1 \\ \underbrace{-2x^2 - xy + 2x - xy + 4y - 2y^2}_{=-2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 1 \\ 2x + 4y - 2 = 0 \end{cases}$$

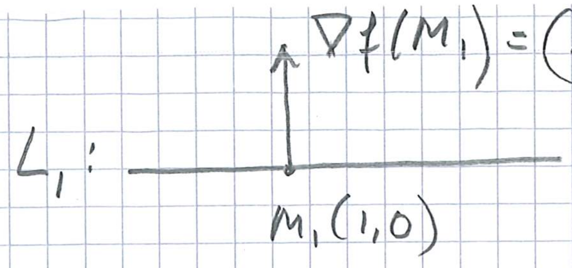
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 1 & (1) \\ x + 2y = 1 & (2) \end{cases} \quad (2) \Rightarrow x = 1 - 2y \quad (1) \Rightarrow$$

$(1-2y)^2 + (1-2y)\cdot y + y^2 = 1$ eller $1 - 4y + 4y^2 + y - 2y^2 + y^2 = 1$

eller $3y^2 - 3y = 0$ eller $y(y-1) = 0 \Leftrightarrow y_1 = 0,\ y_2 = 1$

$x_1 = 1,\ x_2 = -1$

$\Rightarrow M_1(1,0),\ M_2(-1,1)$

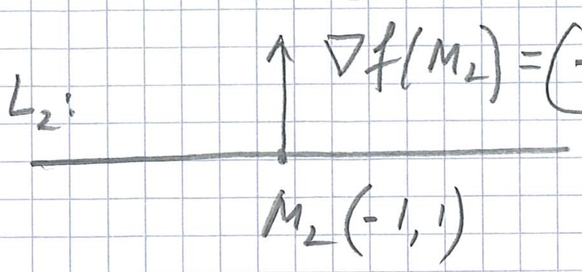


$\Rightarrow A_1x + B_1y + C_1 = 0$ eller

$2x + y + C_1 = 0$ Insättning M_1

$2\cdot 1 + 0 + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = -2$

$\Rightarrow L_1: \underline{2x + y - 2 = 0}$



$\Rightarrow -x + y + C_2 = 0$ M_2

$1 + 1 + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = -2$

$\Rightarrow L_2: -x + y - 2 = 0$ eller $\underline{x - y + 2 = 0}$

2 (a) $f''_{xy} = xy$ Lös ekv.

Obs $f''_{xy} = (f'_x)'_y$. Integrera m.a.p. y

$$\Rightarrow f'_x = \int (f'_x)'_y \, dy = \int xy \, dy = \frac{xy^2}{2} + c(x)$$

$$\Rightarrow f = \int f'_x \, dx = \int \left(\frac{xy^2}{2} + c(x)\right) dx =$$

$$= \underline{\frac{x^2y^2}{4} + \tilde{C}(x) + D(y)}, \text{ där } \tilde{C}' = c$$

(b) Transformera $U = z''_{xy}$ till nya variabler $u = x$ o $v = \frac{x}{y}$

$$\begin{cases} u'_x = 1, & u'_y = 0 \\ v'_x = \frac{1}{y}, & v'_y = -xy^{-2} \end{cases}$$

Obs $\quad z''_{xy} = (z'_x)'_y$

$$z'_x = z'_u \cdot \underbrace{u'_x}_{1} + z'_v \cdot \underbrace{v'_x}_{\frac{1}{y}} = \underline{z'_u + \frac{1}{y}\cdot z'_v}$$

$$z''_{xy} = \left(z'_u + \frac{1}{y}\cdot z'_v\right)'_y = (z'_u)'_y + \left(\frac{1}{y}\cdot z'_v\right)'_y =$$

$$= (z'_u)'_u \cdot \overbrace{u'_y}^{=0} + (z'_u)'_v \cdot \overbrace{v'_y}^{=-xy^{-2}} + \left(-\frac{1}{y^2}\right)\cdot z'_v + \frac{1}{y}\cdot (z'_v)'_y =$$

$$= z''_{uv}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right) - \frac{1}{y^2}\cdot z'_v + \frac{1}{y}\left((z'_v)'_u \cdot \overbrace{u'_y}^{=0} + (z'_v)'_v \cdot \underbrace{v'_y}_{\left(-\frac{x}{y^2}\right)}\right) =$$

$$= -\frac{x}{y^2}\cdot z''_{uv} - \frac{1}{y^2} z'_v + \frac{1}{y} z''_{vv}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right) =$$

$$= -\underbrace{\frac{x}{y^2}}_{=\frac{v^2}{u}}\cdot z''_{uv} - \underbrace{\frac{1}{y^2}}_{=\frac{v^2}{u^2}}\cdot z'_v - \underbrace{\frac{x}{y^3}}_{=\frac{v^3}{u^2}} z''_{vv} =$$

$$= \underline{-\frac{v^2}{u}\cdot z''_{uv} - \frac{v^2}{u^2}\cdot z'_v - \frac{v^3}{u^2}\cdot z''_{vv}}$$

(3) $\quad f(x,y) = 3x^2 - 3y^2 + 2y^3 - 6xy - 2$

(1) $\quad \nabla f = \bar{0} \Leftrightarrow \begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 6y = 0 \\ -6y + 6y^2 - 6x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x - y = 0 & (1) \\ -y + y^2 - x = 0 & (2) \end{cases} \qquad (1)\ x = y \rightarrow (2) \qquad y^2 - y - y = 0 \Leftrightarrow y^2 - 2y = 0 \Leftrightarrow$$

$y_1 = 0, \quad y_2 = 2 \Rightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = 2.$

$M_1(0,0)$, $M_2(2,2)$ är stationära punkter

(ii) M: $Q_M(h,k) = f''_{xx}(M)\cdot h^2 + 2f''_{xy}(M)hk + f''_{yy}(M)k^2$

	M_1	M_2
$f''_{xx} = 6$	6	6
$f''_{xy} = -6$	-6	-6
$f''_{yy} = -6+12y$	-6	18

$Q_1(h,k) = 6h^2 - 12hk - 6k^2 = 6(h^2 - 2hk - k^2) =$
$= 6((h-k)^2 - 2k^2)$, indefinit, M_1 är en sadelpunkt.

$Q_2(h,k) = 6h^2 - 12hk + 18k^2 = 6(h^2 - 2hk + 3k^2) =$
$= 6((h-k)^2 - k^2 + 3k^2) = 6((h-k)^2 + 2k^2)$, pos. def.

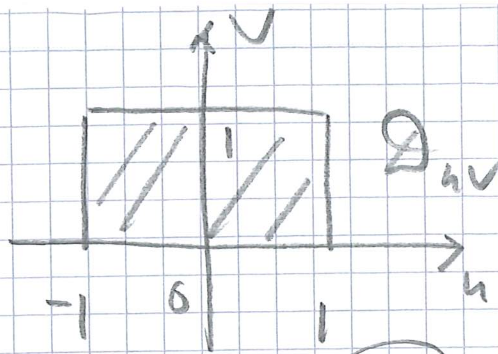
$\Rightarrow$ M_2 är en str. lok. minimipunkt.

(4) $I = \iint_D (3x+2y)\cos(8x)\,dx\,dy$

$D = \{-1 \le \underbrace{3x+2y}_{u} \le 1,\quad 0 \le \underbrace{5x-2y}_{v} \le 1\}$

Obs $\underline{u+v = 8x}$, $\begin{cases} u = 3x+2y \\ v = 5x-2y \end{cases}$ $\dfrac{d(u,v)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -16$

$\Rightarrow$ $\dfrac{d(x,y)}{d(u,v)} = -\dfrac{1}{16}$



$D_{uv} \Rightarrow I = \iint_{D_{uv}} u\cos(u+v)\cdot\left|\frac{d_{xy}}{d_{uv}}\right| du\,dv$ ← belopp

$$= \frac{1}{16}\int_{-1}^{1}\left(\int_{0}^{1} u\cos(u+v)\,dv\right)du =$$

$$\frac{1}{16}\int_{-1}^{1} u\sin(u+v)\Big|_0^1 du = \frac{1}{16}\int_{-1}^{1} u\left(\sin(u+1)-\sin u\right)du =$$

$$= \frac{1}{16}\int_{-1}^{1} u\left(\sin u\cdot\cos 1 + \cos u\cdot\sin 1 - \sin u\right)du =$$

$$= \frac{1}{16}\int_{-1}^{1}\underbrace{u\sin u}_{\text{jämn}}(\cos 1-1)\,du + \frac{1}{16}\underbrace{\int_{-1}^{1}\underbrace{u\cos u}_{\text{udda}}\cdot\sin 1\,du}_{=0} =$$

$$= \frac{1}{16}\cdot 2(\cos 1-1)\underbrace{\int_0^1 u\sin u\,du}_{I_1}$$

Obs

$$\int u\sin u\,du = -u\cos u - \int 1\cdot(-\cos u)\,du = -u\cos u + \sin u + C$$

$$\Rightarrow I_1 = \Big[-u\cos u + \sin u\Big]_0^1 = \underline{-\cos 1 + \sin 1}$$

$\Rightarrow$ Svar: $\underline{I = \frac{1}{8}(\cos 1 - 1)\cdot(\sin 1 - \cos 1)}$

5 $f(x,y) = xy^2$

$K: \underbrace{x^4 + 2y^4}_{g(x,y)} = 48$ ("en ellips")

Obs $\begin{cases} K \text{ är kompakt} \\ f \text{ är kontinuerlig} \end{cases} \Rightarrow f$ har max/min på K.

Kandidatpunkter:

$\begin{cases} \nabla f, \nabla g \text{ är lin. beroende} \\ g = 48 \end{cases}$ $\Updownarrow$

Obs $\nabla f = (y^2, 2xy)$

$\nabla g = (4x^3, 8y^3)$

$\begin{cases} \begin{vmatrix} y^2 & 2xy \\ 4x^3 & 8y^3 \end{vmatrix} = 0 \\ g = 48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8y^5 - 8x^4y = 0 \\ x^4 + 2y^4 = 48 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} y(y^4 - x^4) = 0 & (1) \\ x^4 + 2y^4 = 48 & (2) \end{cases}$

(1): $y_1 = 0$ $\underline{o}$ $y = \pm x$

Insättning i (2):

$y_1 = 0$, $x^4 = 48 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt[4]{48} = \pm 2\sqrt[4]{3}$

$y = \pm x$, $3x^4 = 48$ eller $x^4 = 16$ eller $x = \pm 2$

$\Rightarrow$ Kandidatpunkter: $P_1(0, 2\sqrt[4]{3})$, $P_2(0, -2\sqrt[4]{3})$, $P_3(2,2)$, $P_4(2,-2)$, $P_5(-2,2)$, $P_6(-2,-2)$

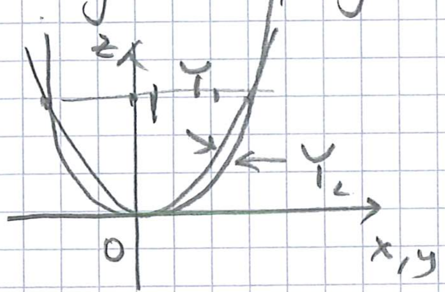
Räkna värde (kandidater).

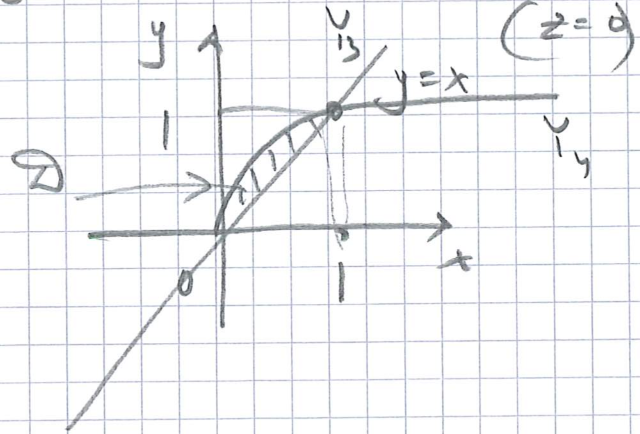
$$f(P_1) = f(P_2) = \underline{0}$$
$$f(P_3) = f(P_4) = 2\cdot 2^2 = \underline{8}$$
$$f(P_5) = f(P_6) = -2\cdot 2^2 = -8$$

$\Rightarrow$ $\max f = 8$ antas i P_3, P_4

$\min f = -8$ antas i P_5, P_6.

(6) Volym av kroppen som avgränsas av ytorna $\underbrace{x^2+y^2-z=0}_{Y_1}$, $\underbrace{5x^2+5y^2-z=0}_{Y_2}$, $\underbrace{y-x=0}_{Y_3}$, $\underbrace{y^2-x=0}_{Y_4}$





Obs
$x = y^2 \Leftrightarrow y = x^{1/2}$

$$\Rightarrow V = \iint_{\mathcal{D}} \left((5x^2+5y^2) - (x^2+y^2)\right) dx\,dy =$$

$$= 4\iint_{\mathcal{D}} (x^2+y^2)\,dx\,dy = 4\int_0^1 \left(\int_x^{\sqrt{x}} (x^2+y^2)\,dy\right) dx =$$

$$= 4\int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3}\right]_x^{\sqrt{x}} = 4\int_0^1 \left(x^2\sqrt{x} + \frac{x\sqrt{x}}{3}\right) - \left(x^3 + \frac{x^3}{3}\right) dx$$

$$= 4\int_0^1 \left(x^{5/2} + \frac{x^{3/2}}{3} - \frac{4}{3}x^3\right) dx = 4\left(\frac{x^{7/2}}{7/2} + \frac{x^{5/2}}{3\cdot 5/2} - \frac{4}{3}\cdot\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1$$

$$= 4\left(\frac{2}{7} + \frac{2}{15} - \frac{1}{3}\right) = 4\left(\frac{2}{7} - \frac{3}{15}\right) = (4\cdot 9)/7\cdot 15 = 12/35$$