

TENTAMEN I MATEMATIK TAIU08/TEN1 (FLERVARIABELANALYS)
2025-10-31 KL 14-19

Inga hjälpmedel tillåtna.

Uppgifterna bedöms med 0-3 poäng.

15-18 poäng ger betyg 5, 11-14 poäng 4, 8-10 poäng 3.

Resultatet kommer inom två veckor.

1. Låt $f(t)$ vara en C^2 -funktion av en variabel och $g(x, y) = xy + f(\frac{x}{y})$.
 - (i) Finn g''_{xx} och g''_{yy} (2p).
 - (ii) Är g en lösning till ekv: $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = y \frac{\partial z}{\partial y} - x \frac{\partial z}{\partial x} + 1$ (1p).
2. (i) Transformera ekv: $2 \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = 2x + 4y + 5$
till nya variabler $u = x + 2y$, $v = 4x - 3y$ (2p)
 - (ii) Finn alla lösningar till den här ekvationen (1p).
3. Betrakta funktionen $f(x, y) = 5 + x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$
 - (i) Finn alla stationära punkter till f (1p)
 - (ii) Avgör punkternas karaktär. (2p)
Motivera fullständigt när det gäller kvadratiska former.
4. Bestäm största och minsta värde av $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x + 1$
då $x^2 + y^2 \leq 14$. Vad är värdemängden av f ?
5. Finn arean av området $D = \{(x, y) : |3x + 4y| + |2x - 5y| \leq 6\}$.
6. Beräkna integralen $\int \int \int_E xyz \, dx dy dz$,
där E ges av olikheterna $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

(1)

$$\textcircled{1} \quad g(x, y) = x \cdot y + f\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$(i) \quad g''_{xx} \stackrel{?}{=} g''_{yy} - ?$$

$$g'_x = y + f'\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \frac{1}{y}, \quad g'_y = x + f'\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right)$$

$$g''_{xx} = f''\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \left(\frac{1}{y}\right)^2, \quad g''_{yy} = f''\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right)^2 + f'\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \frac{2x}{y^3}$$

$$= f''\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \frac{x^2}{y^4} + f'\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \frac{2x}{y^3}$$

(ii) Sätt in g'_x, g'_y etc i ekv:

$$x^2 \cdot f''\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \frac{1}{y^2} - y^2 \cdot \left(f''\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \frac{x^2}{y^4} + f'\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \frac{2x}{y^3} \right) -$$

$$- y \cdot \left(x + f'\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) \right) + x \cdot \left(y + f'\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \frac{1}{y} \right) =$$

$$= 0 - f'\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \frac{2x}{y} - xy + f'\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \frac{x}{y} + xy + f'\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \frac{x}{y}$$

$$= 0 \neq 1 \Rightarrow g \text{ är inte lösning till ekv.}$$

$$\textcircled{2} (i) \text{ Transformera } 2 \cdot z'_x - z'_y = 2x + 4y + 5$$

till nya variabler: $u = x + 2y, \quad v = 4x - 3y$

$$u'_x = 1, \quad u'_y = 2, \quad v'_x = 4, \quad v'_y = -3$$

$$z'_x = z'_u \cdot u'_x + z'_v \cdot v'_x = z'_u \cdot 1 + z'_v \cdot 4$$

(2)

$$z'_y = z'_u \cdot u'_y + z'_v \cdot v'_y = z'_u \cdot 2 + z'_v \cdot (-3)$$

Insättning i elev:

$$2 \cdot (z'_u + 4z'_v) - (2z'_u - 3z'_v) = 2(x+2y) + 5 \quad \text{eller}$$

$$11z'_v = 2u + 5 \quad \text{eller} \quad \underline{z'_v = \frac{2}{11}u + \frac{5}{11}}$$

$$(ii) \quad z = \int z'_v dv = \int \left(\frac{2}{11}u + \frac{5}{11} \right) dv = \frac{2}{11}uv + \frac{5}{11}v + C(u)$$

$$= \frac{2}{11}(x+2y) \cdot (4x-3y) + \frac{5}{11}(4x-3y) + C(x+2y), \quad \text{där}$$

$C(\cdot)$ är en godtycklig C^1 -funktion.

$$(3) \quad f(x,y) = 5 + x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$$

$$(i) \quad \nabla f = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \\ 6xy - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 & (1) \\ xy - 2 = 0 & (2) \end{cases} \Rightarrow y = \frac{2}{x} \xrightarrow{(1)} x^2 + \frac{4}{x^2} = 5 \quad \text{eller}$$

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4, x^2 = 1 \quad \text{eller} \quad x = \pm 2, x = \pm 1$$

$\Rightarrow P_1(2, 1), P_2(-2, -1), P_3(1, 2), P_4(-1, -2)$ är stationära.

$$(ii) \quad P: Q(h,k) = f''_{xx}(P)h^2 + 2f''_{xy}(P)hk + f''_{yy}(P)k^2$$

$$f''_{xx} = (f'_x)'_x = 6x, \quad f''_{xy} = (f'_x)'_y = 6y, \quad f''_{yy} = (f'_y)'_y = 6y$$

$$= 6x.$$

(3)

P \	f''_{xx}	f''_{xy}	f''_{yy}
P_1	12	6	12
P_2	-12	-6	-12
P_3	6	12	6
P_4	-6	-12	-6

$$P_1: Q(h, k) = 12h^2 + 12hk + 12k^2 = 12(h^2 + hk + k^2) = 12\left(\left(h + \frac{k}{2}\right)^2 - \frac{k^2}{4} + k^2\right) = 12\left(\left(h + \frac{k}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}k^2\right), \text{ pos. def.}$$

P_1 är en str. lok. min

$$P_2: Q(h, k) = -12h^2 - 12hk - 12k^2 = -12\left(\left(h + \frac{k}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}k^2\right), \text{ neg. def.} \Rightarrow P_2 \text{ är en str. lok. max.}$$

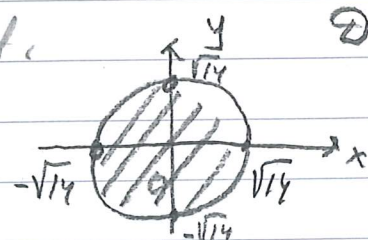
$$P_3: Q(h, k) = 6h^2 + 24hk + 6k^2 = 6(h^2 + 4hk + k^2) = 6((h + 2k)^2 - 3k^2), \text{ indefinit,}$$

$\Rightarrow P_3$ är en sadelpunkt.

$$P_4: Q(h, k) = -6h^2 - 24hk - 6k^2 = -6((h + 2k)^2 - 3k^2),$$

indefinit $\Rightarrow P_4$ är en sadelpunkt.

$$(4) f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x + 1$$



Finn max o min av f på $\{x^2 + y^2 \leq 14\} = D$
 Vad är värdemängden av f ?

OBS 1) f är kontinuerlig, 2) D är en sluten cirkelskiva (kompakt)

(4)

$\Rightarrow f$ har max 0 min

Kandidatpunkt:

1) inre stationära punkter: $\begin{cases} \nabla f = \vec{0} & (i) \\ x^2 + y^2 < 14 & (ii) \end{cases}$

(i): $\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 & (a) \\ x + 2y = 0 & (b) \end{cases} \quad x = -2y \quad (a): 2(-2y) + y - 3 = 0$

eller $-3y - 3 = 0 \Leftrightarrow y = -1 \quad (b): x = 2 \Rightarrow P_1(2, -1) \in \text{Int} \emptyset$

Kontrollera (ii): $2^2 + (-1)^2 = 5 < 14 \Rightarrow P_1(2, -1)$ är en kandidatpunkt
 $\circ f(P_1) = 2^2 + 2 \cdot (-1) + (-1)^2 - 3 \cdot 2 + 1 = 4 - 2 + 1 - 6 + 1 = -2$ (kandidatvärde).

(2) Rand: $x^2 + y^2 = 14$, Tolka som bivillkor

Infr $g(x, y) = x^2 + y^2 \Rightarrow$ kandidatpunkter är lösningar

till systemet $\begin{cases} \nabla f, \nabla g \text{ är lin. beroende} \\ g = 14 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} \begin{vmatrix} f'_x & f'_y \\ g'_x & g'_y \end{vmatrix} = 0 \\ g = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{vmatrix} (2x+y-3) & (x+2y) \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = 0 \\ g = 14 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 2y^2 - 6y - 2x^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 14 \end{cases} \text{ eller } \begin{cases} y^2 - 3y - x^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 14 \end{cases} \quad (+) \Rightarrow$

(5)

$$2y^2 - 3y = 14 \Leftrightarrow y_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 8 \cdot 14}}{4} = \frac{3 \pm 11}{4} = -2; \frac{7}{2}$$

Obs $x^2 + y^2 = 14$

om $y = -2$ så är $x^2 = 10 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{10} \Rightarrow P_2(\sqrt{10}, -2), P_3(-\sqrt{10}, -2)$
är kandidatpunkter

om $y = \frac{7}{2}$ så är $x^2 = 14 - \frac{49}{4} = \frac{7}{4} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{7}}{2}$

$\Rightarrow P_4\left(\frac{\sqrt{7}}{2}, \frac{7}{2}\right), P_5\left(-\frac{\sqrt{7}}{2}, \frac{7}{2}\right)$ är kandidatpunkter

Beräkna kandidatvärde:

$$f(P_2) = (\sqrt{10})^2 + \sqrt{10} \cdot (-2) + (-2)^2 - 3\sqrt{10} + 1 = \underline{15 - 5\sqrt{10}}$$

$$f(P_3) = (-\sqrt{10})^2 - \sqrt{10} \cdot (-2) + (-2)^2 + 3\sqrt{10} + 1 = \underline{15 + 5\sqrt{10}}$$

$$f(P_4) = \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 + \frac{\sqrt{7}}{2} \cdot \frac{7}{2} + \left(\frac{7}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{\sqrt{7}}{2} + 1 = \underline{15 + \frac{\sqrt{7}}{4}}$$

$$f(P_5) = \left(-\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 - \frac{\sqrt{7}}{2} \cdot \frac{7}{2} + \left(\frac{7}{2}\right)^2 + 3 \frac{\sqrt{7}}{2} + 1 = \underline{15 - \frac{\sqrt{7}}{4}}$$

Välj max o min av funktions kandidatvärde:

$$\left[\begin{array}{l} \max f = 15 + 5\sqrt{10} \text{ antas i } P_3(-\sqrt{10}, -2) \\ \min f = -2 \text{ antas i } P_1(2, -1), \text{ ty } 15 - 5\sqrt{10} > -2 \\ \text{Obs } V_f = [-2, 15 + 5\sqrt{10}] \text{ (värdeområdet)} \end{array} \right.$$

(5) Finn arean $\mathcal{A} = \{(x, y) : |3x + 4y| + |2x - 5y| \leq 6\}$

Obs arean $= \iint_{\mathcal{A}} 1 \, dx \, dy,$

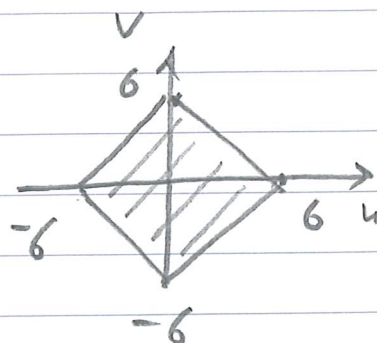
(6)

Varisabel byle: $\begin{cases} u = 3x + 4y \\ v = 2x - 5y \end{cases} \Rightarrow A = \iint_{D_{uv}} 1 \cdot \left| \frac{dx \, dy}{du \, dv} \right| du \, dv$

Obs $\frac{d(xy)}{d(uv)} = \frac{1}{\frac{du \, v}{dx \, y}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}} = \frac{1}{-15-8} = -\frac{1}{23}$

$\Rightarrow \left| \frac{d(xy)}{d(uv)} \right| = \frac{1}{23}$

$D_{uv} = \{ |u| + |v| \leq 6 \}$



Obs $A = \frac{1}{23} \iint_{D_{uv}} 1 \, du \, dv =$

$= \frac{1}{23} \cdot \text{arean av } D_{uv} = \frac{1}{23} \cdot (6\sqrt{2})^2 = \underline{\underline{\frac{72}{23}}}$

⑥ Beräkna $I = \iiint_E xyz \, dx \, dy \, dz$, där

$E = \{ x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \}$

Använd sfäriska koordinater

Obs $\left| \frac{d(xyz)}{d(r, \varphi, \psi)} \right| = r^2 \sin \varphi$

$\begin{cases} x = r \sin \varphi \cos \psi \\ y = r \sin \varphi \sin \psi \\ z = r \cos \varphi \end{cases}$

$D_{r\varphi\psi} : \begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow I = \iiint_{D_{r\varphi\psi}} r^5 \cdot \sin^3 \varphi \cdot \cos \varphi \cdot \cos \psi \sin \psi \, dr \, d\varphi \, d\psi$

(7)

for ts: $I = \int_0^2 r^5 dr \cdot \int_0^{\pi/2} \sin^3 \psi \cos \psi d\psi \cdot \int_0^{\pi/2} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi =$

$$= \frac{r^6}{6} \Big|_0^2 \cdot \frac{\sin^4 \psi}{4} \Big|_0^{\pi/2} \cdot \frac{\sin^2 \varphi}{2} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{2^6}{6} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{4}{3}}}$$