Linköpings universitet
Magnus Berggren, MAI

Tentamen i Analys i en variabel del 1, utbildningskod TAIU10, modul TEN1. 2022-10-30 , kl 8.00 – 13.00

Penna,radergummi,linjal och passare får användas. Formelsamlingar och andra hjälpmedel är ej tillåtna. Lösningarna skall vara fullständiga,välmotiverade,ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Uppgifterna bedöms med 0 – 3 poäng. För betyg n ($n = 3, 4$ eller 5) krävs minst $4(n-1)$ poäng. Godkänd dugga 1 och dugga 2 ger vardera 1 p. Observera att bonus enbart gäller för betyget 3. Skriv på omslaget hur många bonuspoäng (B=0,B=1 eller B=2) du har.

---

1) Bestäm realdel, imaginärdel, belopp och alla argument till $z = \dfrac{(\sqrt{3}+i)^2(1+i)}{1-i}$.

2) Rita funktionen $y(x) = \dfrac{x^2}{x^2+2x+3}$. Eventuella asymptoter och stationära punkter skall framgå ur figuren.

3) Lös ekvationerna a) $\sin 3x = \dfrac{1}{2}$ b) $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$

c) Uttrycket $3\cos x + 5\sin x$ kan skrivas på formen $A\sin(x+v)$, där A är en konstant och v en förskjutningsvinkel. Bestäm A och $\tan v$.

4) Bestäm följande gränsvärden

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2+x-6}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+3x}-x)$ c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos(1+x)-\cos 2}{x-1}$

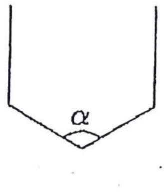
5) En låda utan lock, med kvadratisk bottenyta, ska ha begränsningsytan 12 dm^2. Bestäm lådans maximala volym.

6) a) Undersök om man kan definiera $f(0)$ så att f blir kontinuerlig i 0, ifall $f(x) = \dfrac{\ln(1+x^2)}{x^3}$ för $x > 0$.

b) Använd <u>definitionen</u> av derivata för att räkna ut $f'(x)$ då $f(x) = \sqrt{3x+1}$.

c) Antag att $f(x) = 2x + \ln x$, $x > 0$. Räkna ut derivatan $(f^{-1})'(2)$.

7) Man vill tillverka en hängränna av fyra stycken lika breda brädor. Rännan ska ha lodräta sidor , så att tvärsnittet ser ut som i figuren. Hur ska vinkeln mellan bottenbrädorna väljas för att rännan skall rymma så mycket som möjligt ?



Kortfattade lösningsförslag till tentamen

Analys i en variabel del 1. TAIU10

2022-10-30

1.

$$z = \frac{(\sqrt{3}+i)^2(1+i)}{1-i} = \frac{\left(2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^2 \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}} =$$

$$= 4e^{i\frac{\pi}{3}} e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)} = 4e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)} = 4e^{i\frac{5\pi}{6}} =$$

$$= 4\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right) = -2\sqrt{3}+2i$$

Svar: $\begin{cases} \operatorname{Re} z = -2\sqrt{3} & \operatorname{Im} z = 2 \\ |z| = 4 & \arg z = \frac{5\pi}{6} + k\cdot 2\pi, \; k\in\mathbb{Z}. \end{cases}$

2.

$$y(x) = \frac{x^2}{x^2+2x+3} = \frac{x^2}{(x+1)^2+2}, \quad x\in\mathbb{R}.$$

$$y'(x) = \frac{2x(x^2+2x+3) - x^2(2x+2)}{(x^2+2x+3)^2} = \frac{2x^2+6x}{(x^2+2x+3)^2} =$$

$$= \frac{2x(x+3)}{(x^2+2x+3)^2} = 0 \implies x_1 = 0, \quad x_2 = -3$$

stationära punkter.

teckenstudie av $y'(x)$

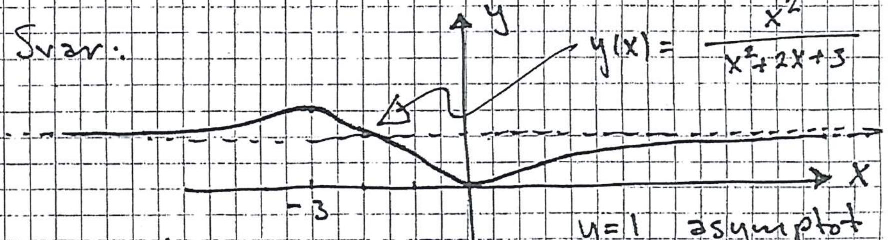
x		-3		0	
$y'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$y(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cancel{x^2}\,1}{\cancel{x^2}\left(1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)} = 1$$

Värdetabell

x	y
-3	$\frac{3}{2}$
0	0
$\to\pm\infty$	$\to 1$

Svar:



max för $x=-3$

min för $x=0$.

$y=1$ asymptot då $x\to\pm\infty$.

3.

a. $\sin 3x = \frac{1}{2} \iff 3x = \begin{cases} \pi/6 + n\cdot 2\pi \\ 5\pi/6 + n\cdot 2\pi \end{cases}$

Svar:

$$\iff x = \begin{cases} \frac{\pi}{18} + \frac{n2\pi}{3} \\ \frac{5\pi}{18} + \frac{n2\pi}{3} \end{cases}, \; n\in\mathbb{Z}.$$

b. $t = \cos x$

$$2t^2 - 3t + 1 = 0$$

$$(t-1)(2t-1) = 0$$

$$\implies t_1 = 1, \quad t_2 = \frac{1}{2}$$

Svar: $x = \begin{cases} n2\pi \\ \pm\frac{\pi}{3} + n2\pi \end{cases}, \; n\in\mathbb{Z}.$

c. $A\sin(x+v) = A(\sin x\cos v + \cos x \sin v)$

$$\begin{cases} A\sin v = 3 \\ A\cos v = 5 \end{cases} \implies \begin{cases} A = \sqrt{34} \\ \tan v = \frac{3}{5}. \end{cases}$$

Svar:

4. a. $\dfrac{x^2-4}{x^2+x-6} = \dfrac{(x+2)\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x+3)} \to \dfrac{4}{5}$

då $x \to 2$.

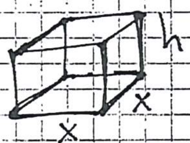
b. $\sqrt{x^2+3x} - x = \dfrac{\cancel{x^2}+3x-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+3x}+x} =$

$\underset{x>0}{=} \dfrac{3\cancel{x}}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\underset{\to 0}{\frac{3}{x}}}+1\right)} \to \dfrac{3}{2}$ då $x \to \infty$.

c. $\left| \begin{array}{l} h = x-1 \\ x \to 1 \\ \Rightarrow h \to 0 \end{array} \right| = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\cos(2+h)-\cos 2}{h} =$

$= \left| \begin{array}{c} \text{jfr. derivatans def} \\ D\cos x = -\sin x \end{array} \right| = -\sin 2.$

5.



$x^2 + 4xh = 12$

$h = \dfrac{12-x^2}{4x}$

$V(x) = x^{\cancel{2}} \cdot \dfrac{12-x^2}{4\cancel{x}} = 3x - \dfrac{x^3}{4}$, Maximera $V(x)$

$V'(x) = 3 - \dfrac{3x^2}{4} = \dfrac{3}{4}(4-x^2) = \dfrac{3}{4}(2-x)(2+x)$

x		2	
$V'(x)$	$+$	0	$-$
$V(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

$x=2$ ger V_{max}.

Svar: $V(2) = 6 - \dfrac{2^3}{4} = 6-2 = \underline{\underline{4\ dm^3}}$.

6. a. $\lim\limits_{x\to 0^+} \underbrace{\dfrac{\ln(1+x^2)}{x^2}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\dfrac{1}{x}}_{\to\infty} = \infty$

f kont. i 0 om.m. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$.

Svar: Nej.

b. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{3(x+h)+1}-\sqrt{3x+1}}{h} =$

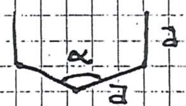
$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\cancel{3x}+3\cancel{h}\cancel{+1}\cancel{-3x}\cancel{-1}}{\cancel{h}\left(\sqrt{3(x+h)+1}+\sqrt{3x+1}\right)} = \dfrac{3}{2\sqrt{3x+1}}$

c. $(f^{-1})'(2) = \dfrac{1}{f'(1)} = \dfrac{1}{3}$

$2 = 2x + \ln x$
$\Rightarrow x = 1.$

$f'(x) = 2 + \dfrac{1}{x}$

7.



tvärsnittsarean $= f(\alpha)$

$f(\alpha) = \dfrac{2a\sin\frac{\alpha}{2} \cdot a\cos\frac{\alpha}{2}}{2} + 2a^2\sin\frac{\alpha}{2}$

Maximera $f(\alpha)$. $0 < \alpha < \pi$.

$f'(\alpha) = a^2\left(\frac{1}{2}\underbrace{\cos\alpha}_{=2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1} + \cos\frac{\alpha}{2}\right) = 0$

$t = \cos\frac{\alpha}{2}$.

$\vdots$

$\alpha = 2\arccos\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$

α			
$f'(\alpha)$	$+$	0	$-$
$f(\alpha)$	$\nearrow$		$\searrow$

Svar:

$\alpha = 2\arccos\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$