Linköpings universitet
Magnus Berggren, MAI

Tentamen i Analys i en variabel del 1, utbildningskod TAIU10, modul TEN1. 2019-10-25, kl 8.00 – 13.00

Penna,radergummi,linjal,passare och gradskiva får användas. Formelsamlingar och andra hjälpmedel är ej tillåtna. Lösningarna skall vara fullständiga,välmotiverade,ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Uppgifterna bedöms med 0 – 3 poäng. För betyg n (n = 3, 4 eller 5) krävs minst 4(n-1) poäng. Godkänd dugga 1 och dugga 2 ger vardera 1 p. Observera att bonus enbart gäller för betyget 3. Skriv på omslaget hur många bonuspoäng (B=0,B=1 eller B=2) du har.

---

1. Lös ekvationerna

a) $\sin(2x+\dfrac{\pi}{2})=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ b) $2sin^2x - 5cosx + 1 = 0$ c) $\ln x^3 + \ln\dfrac{2}{x} = \ln 2$

2.

a) Bestäm alla lösningar, reella såväl som komplexa, till ekvationen
$z^3 - 3z^2 + 4z + 8 = 0$ (2p)

b) Bestäm ett argument för $z = \dfrac{(-1+i\sqrt{3})(1+i)}{2i(1-i)}$ (1p)

3. Beräkna följande gränsvärden

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-x^2-x-2}{x^2-x-2}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{4x+1}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}$ c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{2x-2}-1}{\sin(x-1)}$

4. Bestäm största och minsta värde (om sådana finns) av $f(x)=e^{12x-x^3}$, $x \geq -3$.

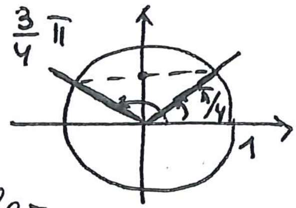
5. Rita kurvan $y=\dfrac{e^x}{x+1}$ med eventuella asymptoter och lokala maximi- och minimipunkter.

Bestäm antalet olika reella rötter till ekvationen $\dfrac{e^x}{x+1} = k$ för alla olika reella värden på konstanten k.

6. Bestäm konstanterna a och b så att funktionen $f(x) = \begin{cases} 4x^2 + 2b, & x \geq 1 \\ ax^3 + bx, & x < 1 \end{cases}$ blir deriverbar för alla x.

7. Visa att funktionen $g(x) = xe^x$, $x \geq -1$, har en invers funktion. Låt f vara inversen till g. Bestäm definitionsmängden D_f, värdemängden V_f samt beräkna $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{f(x)}$.

1a $\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$



$\Updownarrow$

$2x+\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$ eller

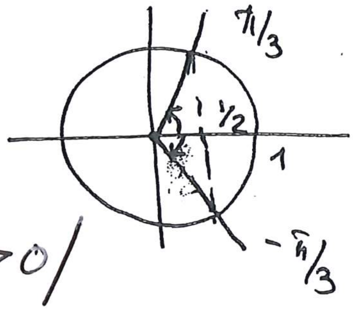
$2x+\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$ dvs $\underline{x = \pm\frac{\pi}{8} + \pi n,\ n\in\mathbb{Z}}$

1b. $2\sin^2 x - 5\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2(1-\cos^2 x) - 5\cos x + 1 =$

$\Leftrightarrow -2\cos^2 x - 5\cos x + 3 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2}$ eller $\cos x = -3$

$\cos x = -3$ saknar lösning

$\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \underline{x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}}$



1c $\ln x^3 + \ln\frac{2}{x} = \ln 2 \Leftrightarrow /x>0/$

$3\ln x + \ln 2 - \ln x = \ln 2 \Leftrightarrow 2\ln x = 0$

$\Leftrightarrow \underline{x = 1}.$

Svar: a) $x = \pm\frac{\pi}{8} + \pi n,\ n\in\mathbb{Z}$. b) $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$

c) $x = 1$.

2a. $z^3 - 3z^2 + 4z + 8 = 0 \Leftrightarrow (z+1)(z^2-4z+8) = 0$

$\Leftrightarrow \underline{z_1 = -1},\ \underline{z_{2,3} = 2\pm 2i}$

2b. $\operatorname{Arg}\frac{(-1+i\sqrt{3})(1+i)}{2i(1-i)} = \operatorname{Arg}(-1+i\sqrt{3}) + \operatorname{Arg}(1+i) -$

$-\operatorname{Arg} 2i - \operatorname{Arg}(1-i) = \frac{2}{3}\pi + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \underline{\frac{2}{3}\pi}$

Svar: a) $z_1 = -1,\ z_{2,3} = 2\pm 2i$

b) $\operatorname{Arg} z = \frac{2}{3}\pi$.

3a. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-x^2-x-2}{x^2-x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-2)(x^2+x+1)}{(x-2)(x+1)} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+x+1}{x+1}$

$= \underline{\dfrac{7}{3}}.$

3b. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{4x+1}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x}{\sqrt{x}\,(\sqrt{4x+1}+\sqrt{x+1})}$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3}{\sqrt{4+\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}} = \underline{1}$

3c. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^{2x-2}-1}{\sin(x-1)} \; \Big/ \begin{matrix} x-1=t \\ t\to 0 \end{matrix} \Big/ = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{e^{2t}-1}{\sin t}$

$= \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{e^{2t}-1}{2t} \cdot \dfrac{2t}{t} \cdot \dfrac{t}{\sin t} = \underline{2}$ ty

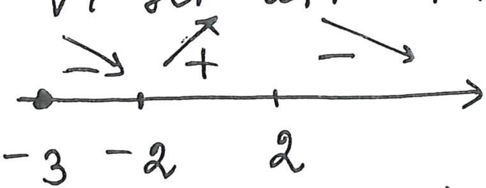
$\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{e^{2t}-1}{2t} = 1$ och $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin t}{t} = 1.$

Svar: a) $\frac{7}{3}$ b) 1 c) 2

4. $f(x) = e^{12x-x^3}, \quad x \geq -3$

$f'(x) = e^{12x-x^3}(12-3x^2) = 3e^{12x-x^3}(4-x^2)$

Vi ser att $f'(x)=0 \iff x=\pm 2$



Det visar att f har lokalt minimum i $x=-2$ och lokalt maximum i punkten $x=2$

$f(-2)=e^{-16}$, $f(2)=e^{16}$. Dessutom $f(-3)=e^{-9}$ och $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$

Alltså $\underline{f_{max} = f(2) = e^{16}}$, $\underline{f_{min} \text{ saknas.}}$

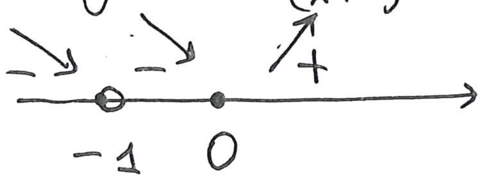
5. $y = \dfrac{e^x}{x+1}$

- $D_y = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -1\}$; $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{x+1} = \infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x}{x+1} = 0 \Rightarrow y = 0$ är vågräta asymptoten

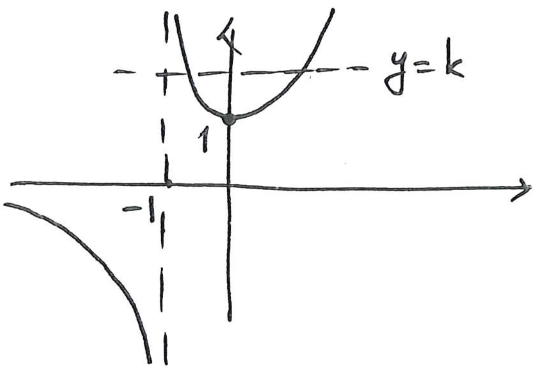
$\lim\limits_{x\to-1-} \dfrac{e^x}{x+1} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-1^+} \dfrac{e^x}{x+1} = +\infty \Rightarrow x = -1$ är lodräta asyptoten

- $y' = \dfrac{e^x(x+1) - e^x}{(x+1)^2} = \dfrac{xe^x}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$



y har lokalt minimum i 0

$y(0) = 1$



Vi ser från grafen att ekvationen $\dfrac{e^x}{x+1} = k$ har

2 reella rötter		om $k > 1$
1	rot	om $k = 1$ eller $k < 0$
ingen	rot	om $0 \leq k < 1$.

6. $f(x) = \begin{cases} 4x^2 + 2b, & x \geq 1 \\ ax^3 + bx, & x < 1 \end{cases}$ $\quad f'(x) = \begin{cases} 8x, & x > 1 \\ 3ax^2 + b, & x < 1 \end{cases}$

För att $f(x)$ blir deriverbar för alla x är nödvändigt att f blir kontinuerlig i punkten $x = 1$, dvs $4 + 2b = a + b \Leftrightarrow$ och $f'_-(1) = f'_+(1)$, dvs $8 = 3a + b$.

$\begin{cases} a - b = 4 \\ 3a + b = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -1 \end{cases}$

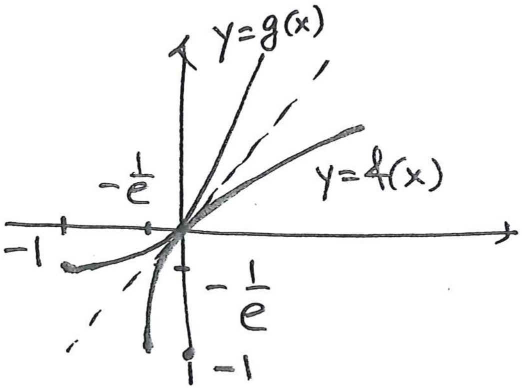
Svar: $a = 3$, $b = -1$.

7. $g(x) = xe^x$, $x \geq -1$. $g'(x) = e^x + xe^x = (1+x)e^x > 0$ för $x > -1 \Rightarrow g(x)$ är strängt växande

Vi har att $g(x)$ är kontinuerlig och strängt växande för alla $x \in D_g \Rightarrow g$ är inverterbar

$\lim_{x\to -1} xe^x = -\frac{1}{e}$, $\lim_{x\to\infty} xe^x = \infty \Rightarrow D_g = [-1, \infty[$

$V_g = [-\frac{1}{e}, \infty[$



Alltså

$\underline{D_f = [-\frac{1}{e}, \infty[}$, $\underline{V_f = [-1, \infty[}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{f(x)} \;\Big/\; \begin{array}{l} t = f(x) \\ t\to\infty \text{ då } x\to\infty \\ x = f^{-1}(t) = te^t \end{array} \;\Big/ =$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{\ln(te^t)}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{\ln t + t}{t} = \lim_{t\to\infty} \left(\frac{\ln t}{t} + 1\right) = \underline{1}$$

Svar: $D_f = [-\frac{1}{e}, \infty[$, $V_f = [-1, \infty[$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{f(x)} = 1$$