Linköpings universitet
Magnus Berggren, MAI

Tentamen i Analys i en variabel del 1, utbildningskod TAIU10, modul TEN1. 2020-01-09, kl 8.00 – 13.00

Penna,radergummi,linjäl,passare och gradskiva får användas. Formelsamlingar och andra hjälpmedel är ej tillåtna. Lösningarna skall vara fullständiga,välmotiverade,ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Uppgifterna bedöms med 0 – 3 poäng. För betyg n (n = 3, 4 eller 5) krävs minst $4(n-1)$ poäng. Godkänd dugga 1 och dugga 2 ger vardera 1 p. Observera att bonus enbart gäller för betyget 3. Skriv på omslaget hur många bonuspoäng (B=0,B=1 eller B=2) du har.

---

1) a) Bestäm absolutbelopp och argument för $(-1+i)^{12}$. (2p).

b) Lös ekvationen $3z - i\bar{z} = 5 - 7i$. (1p)

2) Rita grafen till funktionen $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 4}{x-1}$. Eventuella asymptoter och stationära punkter skall framgå ur figuren.

3) Lös ekvationerna a) $\cos 3x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\sin(4x + \dfrac{\pi}{5}) = \sin 2x$

c) Uttrycket $3\cos x - 5\sin x$ kan skrivas på formen $A\sin(x+v)$, där A är en konstant och v en förskjutningsvinkel. Bestäm A och $\tan v$. I vilken kvadrant ligger v ?

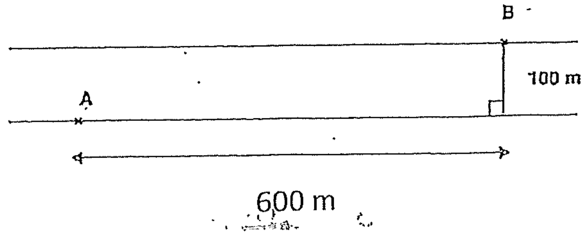
4) Låt $f(x) = \ln(x-1) - 3\ln(5-x) - 2x + 4$. Ange f:s definitionsmängd och bestäm antalet reella nollställen till f.

5) En rak cirkulär cylinder (konservburk) har volymen 2π. Vilken är den minsta möjliga area (inklusive lock och botten) som cylindern kan ha?

6) Bestäm följande gränsvärden

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 2x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{\sin 3x}{x}}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x - 3e^{-x}}{x + 5e^{-x}}$

7) En park ligger mellan två parallella vägar. Helena befinner sig i punkten A och ska gå till busshållplatsen vid punkten B på andra sidan parken. (Se avstånd i figuren). Längs vägen går hon snabbt med hastigheten 3 m/s , men inne i parken kan hon bara gå med hastigheten 2 m/s i det tjocka gräset. Hur skall hon gå för att få minsta möjliga gångtid till busshållplatsen?



Kortfattade lösningsförslag till tentamen
Analys i en variabel del 1. TAIU10

2020-01-09 kl $8^{00}-13^{00}$

1.

a. $(-1+i)^{12} = \left(\sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)^{12} =$

$\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{12} e^{i\frac{3\pi\cdot 12}{4}} = 2^6 e^{i9\pi} = 2^6 e^{i\pi}$

Svar: $|(-1+i)^{12}| = \underline{\underline{64}}$

$\arg((-1+i)^{12}) = \underline{\underline{\pi}}$

b. $3z - i\bar{z} = 5-7i$

Sätt $z = a+ib$

$3(a+ib) - i(a-ib) = 5-7i \iff$

$\begin{cases} 3a-b=5 \\ 3b-a=-7 \end{cases} \iff \begin{cases} 3a-b=5 \\ 9b-3a=-21 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 8b=-16 \\ 3a=5+b \end{cases} \iff \begin{cases} b=-2 \\ a=1 \end{cases}$

Svar: $z = \underline{\underline{1-2i}}$

2. $f(x) = \dfrac{x^2-x+4}{x-1}$, $x \neq 1$

$f'(x) = \dfrac{(2x-1)(x-1)-(x^2-x+4)\cdot 1}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2} =$

$= \dfrac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2} = 0$

x		-1		1		3	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$

Värdetabell inklusive gränsvärden.

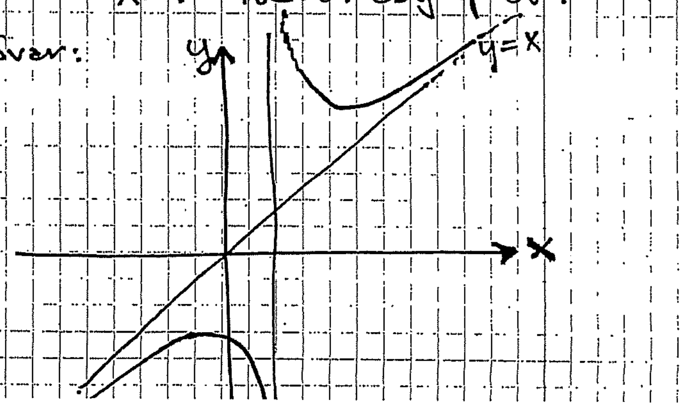
x	y
-1	-3
$\to -\infty$	$\to -\infty$
$\to 1^-$	$\to -\infty$
$\to 1^+$	$\to +\infty$
3	5
$\to \infty$	$\to \infty$

$f(x) = \dfrac{x(x-1)+4}{x-1} = x + \underbrace{\dfrac{4}{x-1}}_{\to 0 \text{ då } x\to\pm\infty}$

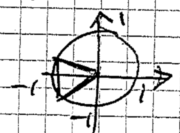
$y=x$ sned asymptot då $x\to\pm\infty$

$x=1$ lodrät asymptot.

Svar:



3a. $\cos 3x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 3x = \pm \frac{5\pi}{6} + n2\pi$



Svar: $x = \pm \frac{5\pi}{18} + \frac{n2\pi}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}.$

3b. $\sin\left(4x + \frac{\pi}{5}\right) = \sin 2x$

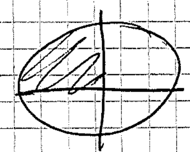
$$\Leftrightarrow \quad 4x + \frac{\pi}{5} = \begin{cases} 2x + n2\pi \\ \pi - 2x + n2\pi \end{cases}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \begin{cases} -\frac{\pi}{10} + n\pi \\ \frac{2\pi}{15} + \frac{n\pi}{3} \end{cases}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Svar:

3c. $A \sin(x+v) = A(\sin x \cos v + \cos x \sin v) =$

$$= \underbrace{A\cos v}_{=-5} \sin x + \underbrace{A \sin v}_{=3} \cos x$$



$A^2 = (-5)^2 + 3^2 \Rightarrow A = \sqrt{34}$ $(A > 0)$

$\tan v = \frac{\sin v}{\cos v} = -\frac{3}{5}$, v ligger i 2:a kvadranten.

$\sin v > 0, \quad \cos v < 0$

4. $f(x) = \ln(x-1) - 3\ln(5-x) - 2x + 4$

$D_f: \{x \in \mathbb{R}: 1 < x < 5\}$

$$f'(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{3}{5-x} - 2 =$$

$$\frac{5-x+3(x-1)-2(-x^2+6x-5)}{(x-1)(5-x)} =$$

$$\frac{2x^2-10x+12}{(x-1)(5-x)} = \frac{2(x-2)(x-3)}{(x-1)(5-x)} = 0$$

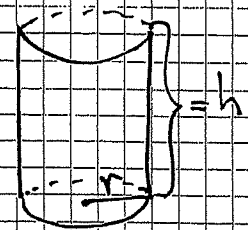
x	1		2		3		5
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$		↗		↘		↗	

$$f(2) = \underbrace{\ln 1}_{=0} - 3\ln 3 - 4 + 4 < 0$$

$$\lim_{x \to 5^-} \Big(\underbrace{\ln(x-1)}_{\to \ln 4} - 3\underbrace{\ln(5-x)}_{\to -\infty} - \underbrace{2x}_{\to 10} + 4\Big) = \infty$$

samt f kontinuerlig ger

Exakt <u>ett</u> reellt nollställe.

5. 

$V = \pi r^2 h = 2\pi$

$A = 2\pi r^2 + 2\pi r h$

$$A(r) = 2\pi r^2 + 2\pi \cancel{r} \cdot \frac{2}{r^{\cancel{2}}} = 2\pi r^2 + \frac{4\pi}{r}$$

$$A'(r) = 4\pi r - \frac{4\pi}{r^2} = 0 \iff r^3 = 1 \iff r = 1$$
$(r > 0)$

r	0		1	
$A'(r)$		−	0	+
$A(r)$		↘		↗

$r = 1$ ger A_{min}

$A(1) = 2\pi + 4\pi = \underline{6\pi}$.

Svar: $A_{min} = \underline{\underline{6\pi \text{ a.e}}}$

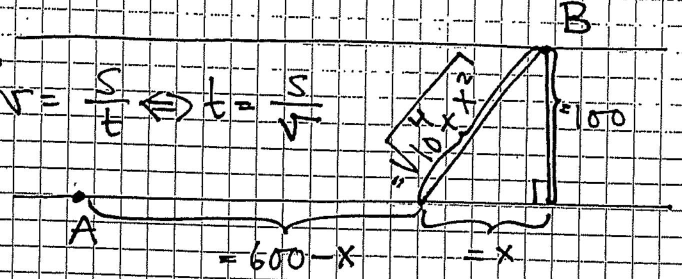
6 a. $$\frac{x^2-5x+6}{x^2-2x} = \frac{\cancel{(x-2)}(x-3)}{x\cancel{(x-2)}} \to \underline{\frac{-1}{2}}$$ då $x \to 2$

b. $$e^{\frac{\sin 3x}{x}} = e^{\overbrace{\frac{\sin 3x}{3x}}^{\to 1} \cdot 3} \to \underline{e^3}$$ då $x \to 0$

6 c. $\dfrac{x-3e^{-x}}{x+5e^{-x}} = \dfrac{\cancel{x}\left(1-\overset{\to 0}{\dfrac{3}{xe^{x}}}\right)}{\cancel{x}\left(1+\underset{\to 0}{\dfrac{5}{xe^{x}}}\right)} \longrightarrow \boxed{1}$

då $x \to \infty$

7. $v = \dfrac{s}{t} \Leftrightarrow t = \dfrac{s}{v}$



$t(x) = \dfrac{600-x}{3} + \dfrac{\sqrt{10^4+x^2}}{2}$

$t'(x) = -\dfrac{1}{3} + \dfrac{\cancel{2}x}{2\cdot\cancel{2}\sqrt{10^4+x^2}} = 0$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{3x}{2} = \sqrt{10^4+x^2}$

$\dfrac{9x^2}{4} = 10^4 + x^2$

$x^2 = \dfrac{4\cdot 10^4}{5}$

$x = \dfrac{2\cdot 10^2}{\sqrt{5}}$

x	0		$\frac{200}{\sqrt{5}}$		600
$t'(x)$		$-$	0	$+$	
$t(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Svar: $x = \dfrac{200}{\sqrt{5}}$ m ger t_{min}.