Linköpings universitet
Magnus Berggren, MAI

Tentamen i Analys i en variabel del 1, utbildningskod TAIU10, modul TEN1. 2020-10-29, kl 8.00 – 13.00

Penna,radergummi,linjal,passare och gradskiva får användas. Formelsamlingar och andra hjälpmedel är ej tillåtna. Lösningarna skall vara fullständiga,välmotiverade,ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Uppgifterna bedöms med 0 – 3 poäng. För betyg n (n = 3, 4 eller 5) krävs minst $4(n\text{-}1)$ poäng. Godkänd dugga 1 och dugga 2 ger vardera 1 p. Observera att bonus enbart gäller för betyget 3. Skriv på omslaget hur många bonuspoäng (B=0,B=1 eller B=2) du har.

---

1. Lös ekvationerna

   a) $\cos(2x+\frac{\pi}{2})=-\frac{1}{2}$ b) $\sin(2x+\frac{\pi}{4})-\sin x=0$ c) $3\ln x-\ln(x+3)=\ln\frac{x^2}{x-1}$.

2. a) Bestäm alla lösningar, reella såväl som komplexa, till ekvationen

   $z^4+3z^3+2z^2-2z-4=0$ (2p)

   b) Räkna ut $z=\dfrac{(-1+i\sqrt{3})^5}{(\sqrt{3}+i)^4}$. Svara på formen $a+ib$. (1p)

3. Beräkna följande gränsvärden

   a) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+2x^2+2x+1}{x^2+4x+3}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+4x+1}-\sqrt{x^2-5x})$ c) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x}{\sin(2x-2)}$

4. Rita grafen till funktionen $f(x)=e^{3x-x^3}$. Eventuella asymptoter och stationära punkter ska framgå i figuren.

5. Visa att $f(x)=e^{2x}+x+1$ har en deriverbar invers funktion f^{-1} och räkna ut

   $$(f^{-1})'(2).$$

6. Hur många reella lösningar har ekvationen $\dfrac{xe^x}{(x+1)^2}=k$ för olika reella värden på konstanten k.

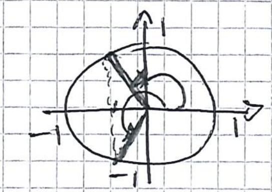
7. Bestäm $f''(0)$ då $f(x)=\begin{cases}5x^2+x^4\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

Kortfattade lösningsförslag till tentamen TAIU10 del I. 2020-10-29.

1. a. $\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2}$

$\iff$

$$2x+\frac{\pi}{2} = \begin{cases} \frac{2\pi}{3} + n2\pi \\ \frac{4\pi}{3} + n2\pi \end{cases}$$



$\iff$ Svar: $x = \begin{cases} \frac{\pi}{12} + n\pi \\ \frac{5\pi}{12} + n\pi \end{cases}, \quad n \in \mathbb{Z}.$

1b. $\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right) = \sin x$

$\iff$

$$2x+\frac{\pi}{4} = \begin{cases} x + n2\pi \\ \pi - x + n2\pi \end{cases}$$

$\iff$

Svar: $x = \begin{cases} -\frac{\pi}{4} + n2\pi \\ \frac{\pi}{4} + \frac{n2\pi}{3} \end{cases}, \quad n \in \mathbb{Z}.$

1c. $3\ln x - \ln(x+3) = \ln\frac{x^2}{x-1}$

/ KRAV: $x > 1$ /
/ log. lagar ger /

$$\ln\frac{x^3}{x+3} = \ln\frac{x^2}{x-1}$$

$\iff$

$$\frac{x^3}{x+3} = \frac{x^2}{x-1}$$ / log. strängt växande /

/ $x^2 > 1$ /

$\iff$

$$x(x-1) = x+3$$

$\iff$

$$x^2-2x-3 = 0$$

$x = 3$, $\cancel{x = -1}$ $\quad x > 1.$

Kontroll:

$V.L_{x=3} = 3\ln 3 - \ln 6 = \ln\frac{3^3}{2\cdot 3} = \ln\frac{9}{2}$

$H.L_{x=3} = \ln\frac{3^2}{3-1} = \ln\frac{9}{2}.$

Svar: $x = 3.$

2 a.

$$p(z) = z^4 + 3z^3 + 2z^2 - 2z - 4 =$$

$$= (z-1)\underbrace{(z^3 + 4z^2 + 6z + 4)}_{\text{fås genom t.ex polynomdivision.}}$$

$\uparrow$ Gissa nollställe.

$p(+1) = 0 \Longleftrightarrow (z-1)$ ingår som faktor.

$p(-2) = 0 \Longleftrightarrow (z+2)$ —— " ——

$$p(z) = (z-1)(z+2)\underbrace{(z^2+2z+2)}_{=0\ ?} = 0$$

$*$ $z^2 + 2z + 2 = 0$ $*$

$$(z+1)^2 - 1 + 2 = 0$$

$$(z+1)^2 = -1$$

$$(z+1)^2 = i^2$$

$$z+1 = \pm i$$

$$z = -1 \pm i$$

Svar: 4 st lösningar

$1, \ -2, \ -1+i, \ -1-i$

2 b.

$$-1 + i\sqrt{3} = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$$

$$= 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$\underline{\underline{\sqrt{3} + i}} = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$z = \frac{(-1+i\sqrt{3})^5}{(\sqrt{3}+i)^4} = \frac{\left(2e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^5}{\left(2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^4} =$$

$$= \frac{2^5 e^{i\frac{10\pi}{3}}}{2^4 e^{i\frac{2\pi}{3}}} = 2e^{i\frac{8\pi}{3}} = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} =$$

$$= 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) =$$

$$= 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + i\sqrt{3}$$

Svar: $z = -1 + i\sqrt{3}$

3 a. $\dfrac{x^3+2x^2+2x+1}{x^2+4x+3} = \dfrac{\cancel{(x+1)}(x^2+x+1)}{\cancel{(x+1)}(x+3)} \to \dfrac{1}{2}$

då $x \to -1$

Svar: $\dfrac{1}{2}$.

b. $\sqrt{x^2+4x+1} - \sqrt{x^2-5x} = \left/ \begin{matrix} \text{typ} \\ \infty - \infty \\ \text{då } x \to \infty \end{matrix} \right| =$

$= \dfrac{\left(\sqrt{x^2+4x+1} - \sqrt{x^2-5x}\right)\left(\sqrt{x^2+4x+1} + \sqrt{x^2-5x}\right)}{\sqrt{x^2+4x+1} + \sqrt{x^2-5x}} =$

$= \dfrac{x^2+4x+1-(x^2-5x)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} + \sqrt{x^2\left(1-\frac{5}{x}\right)}} =$

$\sqrt{x^2} = |x|$

$= \dfrac{9x+1}{x\left(\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}} + \sqrt{1-\frac{5}{x}}\right)} =$

$= \dfrac{\cancel{x}\left(9+\overset{\to 0}{\frac{1}{x}}\right)}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\underset{\to 0}{\frac{4}{x}}+\underset{\to 0}{\frac{1}{x^2}}} + \sqrt{1-\underset{\to 0}{\frac{5}{x}}}\right)} \to \dfrac{9}{2}$ då $x \to \infty$

Svar: $\dfrac{9}{2}$.

3 c. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{\sin(2(x-1))} = \left/ \begin{matrix} t = x-1 \\ x = 1+t \\ x \to 1 \Rightarrow t \to 0 \end{matrix} \right| =$

$= \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\ln(1+t)}{\sin 2t} = \lim\limits_{t \to 0} \underset{\to 1}{\dfrac{\ln(1+t)}{t}} \cdot \dfrac{1}{\underset{\to 1}{\frac{\sin 2t}{2t}}} \cdot \dfrac{1}{2}$

jfr. $\dfrac{\sin x}{x} \to 1$ då $x \to 0$

Svar: Gr.v $= \dfrac{1}{2}$.

---

4. $f(x) = e^{3x-x^3}$, $x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = e^{3x-x^3}(3-3x^2) =$

$= 3(1+x)(1-x)\underbrace{e^{3x-x^3}}_{>0} = 0$?

x		-1		1	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

Värdetabell

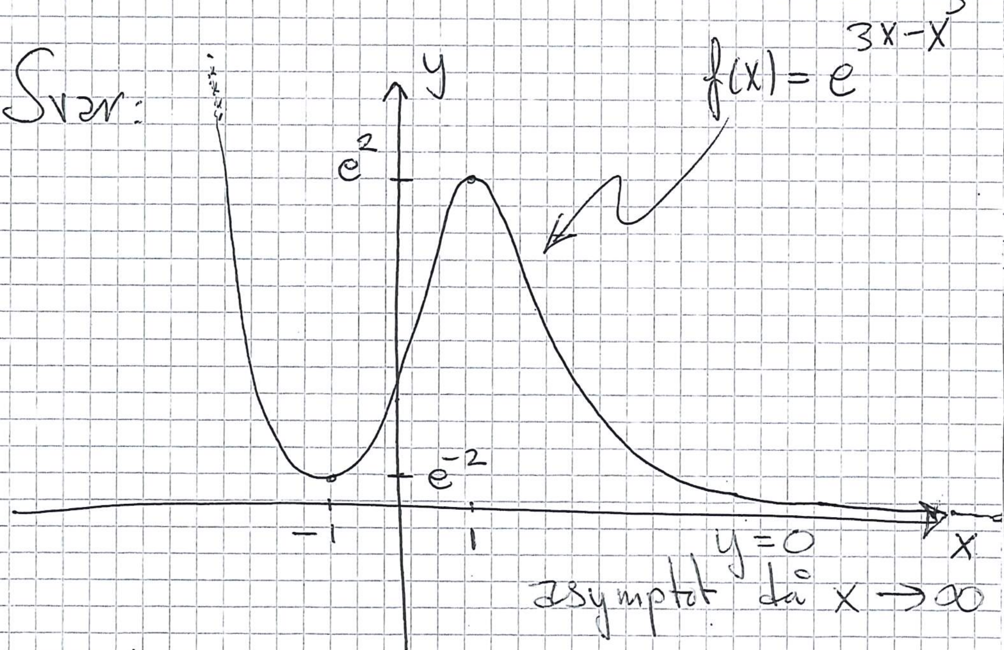
x	y
-1	e^{-2}
1	e^{2}
$\to\infty$	$\to 0$
$\to -\infty$	$\to \infty$
0	1

$$y = e^{3x-x^3} = e^{x^3\left(\underbrace{\frac{3}{x^2}}_{\to 0}-1\right)} \quad \text{då } x \to \pm\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} e^{\overbrace{x^3}^{\to\infty}\left(\underbrace{\frac{3}{x^2}}_{\to 0}-1\right)} = e^{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to -\infty} e^{\overbrace{x^3}^{\to -\infty}\left(\underbrace{\frac{3}{x^2}}_{\to 0}-1\right)} = e^{\infty}$$

Svar:



lokalt min i $(-1, e^{-2})$

lokalt max i $(1, e^{2})$

5 $\quad f(x) = e^{2x}+x+1 \quad , \quad x \in \mathbb{R}$.

$f'(x) = 2e^{2x}+1 > 1 > 0 \Rightarrow$

$f(x)$ strängt väx. $\Rightarrow f$ injektiv.

och $f'(x) > 0$ för alla x.

$\therefore f$ har en deriverbar invers funktion.

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$$

där $b = f(a)$

$b=2$ ger $e^{2a}+a+1 = 2 \Leftrightarrow a=0$

$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2e^0+1} = \frac{1}{3}$$

Svar: $(f^{-1})'(2) = \frac{1}{3}$

6. Bilda $f(x) = \dfrac{xe^x}{(x+1)^2}$

Skissera $f(x)$, $x \neq -1$

$$f'(x) = \frac{(e^x + xe^x)(x+1)^2 - xe^x\, 2(x+1)}{(x+1)^4} =$$

produktregeln i kvotregeln.

$$= \frac{e^x(x+1)^2 - 2xe^x}{(x+1)^3} = \frac{e^x(x^2+1)}{(x+1)^3} \neq 0$$

x		-1	
$f'(x)$	$-$	$\nexists$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\nexists$	$\nearrow$

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{xe^x}{(x+1)^2} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{xe^x}{(x+1)^2} = -\infty$$

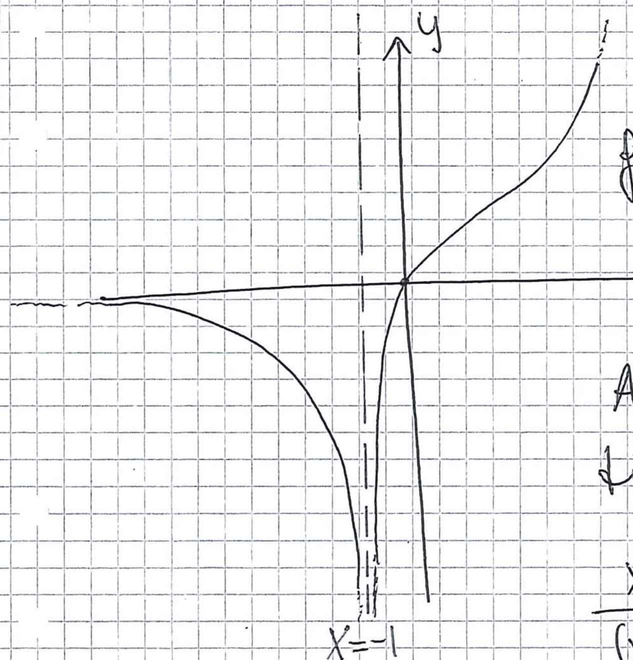
$$\lim_{x \to -\infty} \underbrace{\frac{x}{(x+1)^2}}_{\to 0} \underbrace{e^x}_{\to 0} = 0$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x \overbrace{e^x}^{\to \infty}}{(x+1)^2} = \infty$$

och dominerar.

jfr standardgr.-v

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = \infty \quad (\alpha > 0)$$



$$f(x) = \frac{xe^x}{(x+1)^2}$$

Antal reella rötter till ekvationen

$$\frac{xe^x}{(x+1)^2} = k \quad (y\text{-värde})$$

Svar: $k \geq 0 \Rightarrow 1$ rot.

$k < 0 \Rightarrow 2$ rötter.

7.

$$f'(x) = \begin{cases} 10x + 4x^3\cos\frac{1}{x} + x^4\left(-\sin\frac{1}{x}\right)\left(\frac{-1}{x^2}\right), & x \neq 0 \\ 0 & \end{cases}$$

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0}\left(\underbrace{5x}_{\to 0} + \underbrace{x^3\cos\frac{1}{x}}_{\to 0}\right) = 0$$

$$-1 \leq \cos\frac{1}{x} \leq 1$$

$$f''(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{10x + 4x^3\cos\frac{1}{x} + x^2\sin\frac{1}{x} - 0}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(10 + \underbrace{4x^2\cos\frac{1}{x}}_{\to 0} + \underbrace{x\sin\frac{1}{x}}_{\to 0}\right) = 10$$

$$-1 \leq \sin\frac{1}{x} \leq 1$$

Svar: $f''(0) = 10$