Linköpings universitet
Magnus Berggren, MAI

Tentamen i Analys i en variabel del 1, utbildningskod TAIU10, modul TEN1. 2021-01-07, kl 8.00 – 13.00

Penna,radergummi,linjal,passare och gradskiva får användas. Formelsamlingar och andra hjälpmedel är ej tillåtna. Lösningarna skall vara fullständiga,välmotiverade,ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Uppgifterna bedöms med 0 – 3 poäng. För betyg n ($n = 3, 4$ eller 5) krävs minst $4(n\text{-}1)$ poäng. Godkänd dugga 1 och dugga 2 ger vardera 1 p. Observera att bonus enbart gäller för betyget 3. Skriv på omslaget hur många bonuspoäng (B=0,B=1 eller B=2) du har.

---

1) Rita grafen till funktionen $f(x) = \frac{x-1}{(2+x)^2}$. Eventuella asymptoter och extrempunkter skall framgå ur figuren.

2) Bestäm realdel, imaginärdel, belopp och alla argument till
$z = \frac{(1+i)^6}{(\sqrt{3}+i)^3(1-i\sqrt{3})}$

3)
   a) Bestäm alla x i intervallet $[0, \frac{\pi}{2}]$ som uppfyller olikheten $\sin(3x) > \frac{1}{2}$. (2p)
   b) Lös ekvationen $2\ln(4-x) = \ln(11-2x)$. (1p)

4) Beräkna följande gränsvärden:
   a) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-x^2-x+1}{x^3-3x+2}$
   b) $\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+3x+2} - x)$
   c) $\lim_{x\to 2} \frac{1-\cos(2x-4)}{(x-2)\ln(3x-5)}$.

5) Ekvationen $z^5 + 4z^3 + 8z^2 + 32 = 0$ har en rent imaginär rot. Lös ekvationen fullständigt.

6) En låda, som har formen av ett rätblock med volymen $400\ dm^3$, skall tillverkas. För lådans rektangulära botten gäller att dess längd skall vara dubbelt så stor som dess bredd. Materialkostnaden till botten är $7\ kr/dm^2$, medan materialet till övriga delar (lock och sidoytor) kostar $5\ kr/dm^2$. Bestäm lådans mått så att materialkostnaden minimeras.

7) För vilka värden på konstanten a har ekvationen $\frac{e^{-2x}}{x} = a$ exakt två olika reella lösningar?

Kortfattade lösningsförslag till tentamen

TAIU10 del 1. 2021-01-07.

1. $f(x) = \dfrac{x-1}{(2+x)^2}, \quad x \neq -2$

$$f'(x) = \frac{1\cdot(2+x)^2 - (x-1)2(2+x)}{(2+x)^4} =$$

↑ kvotregeln. ↑ bryt ut gemensam faktor

$$= \frac{\cancel{(2+x)}\,(2+x-(2x-2))}{(2+x)^{\cancel{4}\,3}} = \frac{4-x}{(2+x)^3}$$

$f' = 0 \; ? \Rightarrow x = 4.$

x		-2		4	
$f'(x)$	$-$	$\nexists$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

$$\lim_{x\to -2^-} \frac{x-1}{(2+x)^2} = -\infty \qquad \lim_{x\to -2^+} \frac{x-1}{(2+x)^2} = -\infty$$

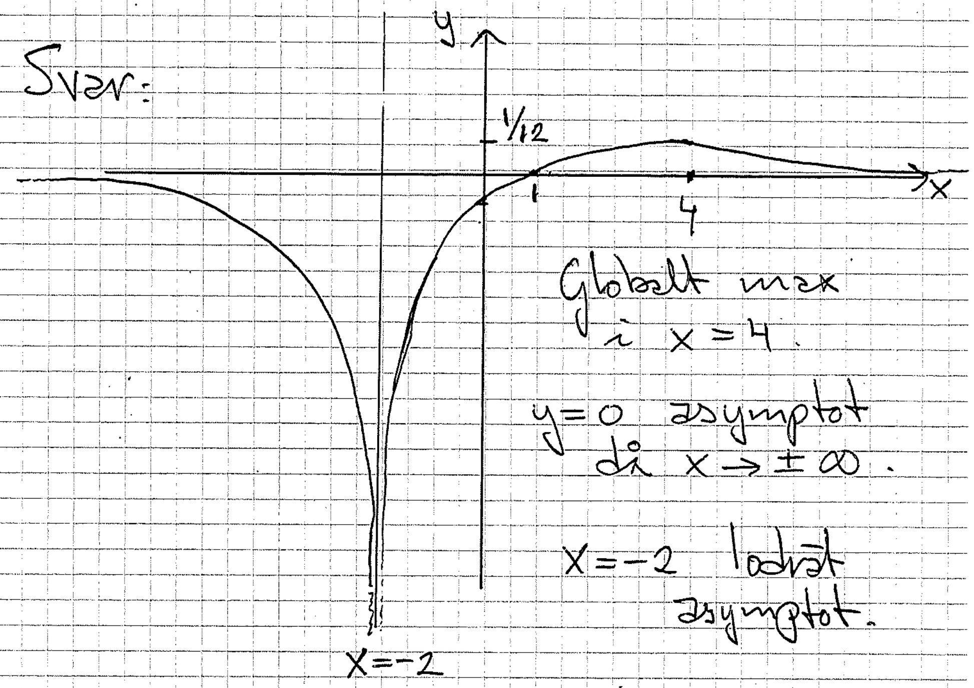
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x-1}{(2+x)^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cancel{x}\,(1-\frac{1}{x})}{x^{\cancel{2}}(\frac{2}{x}+1)^2} = 0$$

$\to 0 \quad \to 1$

$f(4) = \dfrac{4-1}{(2+4)^2} = \dfrac{3}{36} = \dfrac{1}{12}$

$f(1) = 0 \qquad f(0) = -\dfrac{1}{2}$

Svar:



Globalt max i $x = 4$.

$y = 0$ asymptot då $x \to \pm\infty$.

$x = -2$ lodrät asymptot.

2. $$z = \frac{(1+i)^6}{(\sqrt{3}+i)^3(1-i\sqrt{3})} = \frac{\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^6}{\left(2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^3\left(2e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)} =$$

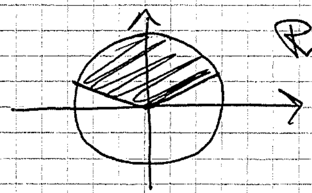
$$= \frac{2^3 e^{i\frac{3\pi}{2}}}{2^3 e^{i\frac{\pi}{2}}2e^{-i\frac{\pi}{3}}} = \frac{1}{2}e^{i\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)} =$$

$$= \frac{1}{2}e^{i\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{1}{2}e^{i\frac{4\pi}{3}} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{4} - \frac{i\sqrt{3}}{4}$$

Svar: $\operatorname{Re} z = -\dfrac{1}{4}$, $\operatorname{Im} z = \dfrac{-\sqrt{3}}{4}$, $|z| = \dfrac{1}{2}$, $\arg z = \dfrac{4\pi}{3} + k2\pi$, k heltal

3 a. $\sin(3x) > \frac{1}{2}$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$



Ritar enhetscirkeln.

$, n \in \mathbb{Z}.$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{6} + n2\pi < 3x < \frac{5\pi}{6} + n2\pi.$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{18} + \frac{n2\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{18} + \frac{n2\pi}{3}$

$x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ger $n = 0$.

Svar: $\frac{\pi}{18} < x < \frac{5\pi}{18}$.

---

3 b. $2\ln(4-x) = \ln(11-2x)$

/ krav: $4-x>0$, $11-2x>0 \Leftrightarrow x<4$ /

$\Rightarrow \ln(4-x)^2 = \ln(11-2x)$

$\Rightarrow (4-x)^2 = 11-2x$

$x^2-8x+16 = 11-2x$

$x^2-6x+5=0$

$\begin{cases} x=1 \\ \cancel{x=5} \text{ falsk.} \end{cases}$

kontroll!

$V.L_{x=1} = 2\ln 3 = \ln 9$

$H.L_{x=1} = \ln 9.$

Svar: $x=1$

---

4 a. $\frac{x^3-x^2-x+1}{x^3-3x+2} = \frac{\cancel{(x-1)}(x^2-1)}{\cancel{(x-1)}(x^2+x-2)} =$

$= \frac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x+2)} \longrightarrow \frac{2}{3}$ då $x \to 1$

Svar: $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-x^2-x+1}{x^3-3x+2} = \frac{2}{3}$

4b. $\frac{(\sqrt{x^2+3x+2}-x)(\sqrt{x^2+3x+2}+x)}{(\sqrt{x^2+3x+2}+x)} =$

$= \frac{x^2+3x+2-x^2}{\sqrt{x^2+3x+2}+x} = \frac{3x+2}{\sqrt{x^2(1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2})}+x} =$

$= \frac{\cancel{x}(3+\underbrace{\frac{2}{x}}_{\to 0})}{\cancel{x}(\sqrt{1+\underbrace{\frac{3}{x}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{2}{x^2}}_{\to 0}}+1)} \longrightarrow \frac{3}{2}$ då $x \to \infty$

Svar: $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+3x+2}-x) = \frac{3}{2}$

4c. $$\lim_{x\to 2} \frac{1-\cos(2(x-2))}{(x-2)\ln(3(x-2)+1)} =$$

$$= \left/ \begin{array}{l} t = x-2 \\ x\to 2 \Rightarrow t\to 0 \end{array} \right/ = \lim_{t\to 0} \frac{1-\cos 2t}{t\ln(1+3t)} =$$

$$= \left/ \begin{array}{l} \text{trig. formel.} \\ \cos 2t = 1-2\sin^2 t \end{array} \right/ = \lim_{t\to 0} \frac{1-(1-2\sin^2 t)}{t\ln(1+3t)} =$$

$$= \lim_{t\to 0} 2\underbrace{\frac{\sin^2 t}{t^2}}_{\to 1^2=1} \cdot \frac{1}{\underbrace{\frac{\ln(1+3t)}{3t}}_{\to 1} \cdot 3} = \frac{2}{3}$$

standardgrv.

Svar: $\frac{2}{3}$.

---

5. $z^5+4z^3+8z^2+32=0$

5 st rötter. Konjugerade. (reella koeff).

en rent imaginär. dvs $z_1 = ib$

insättning ger

$$(ib)^5+4(ib)^3+8(ib)^2+32=0$$

$$ib^5-4ib^3-8b^2+32=0 \Rightarrow b=2.$$

$z_1 = 2i$, $z_2 = -2i$

$(z-z_1)(z-z_2) = z^2+4$ ingår som faktor

$$\begin{array}{l|l} \quad z^3+8 & \\ \hline z^5+4z^3+8z^2+32 & z^2+4 \\ -(z^5+4z^3) & \\ \hline \quad 0+8z^2+32 & \\ \quad -(8z^2+32) & \\ \hline \quad\quad 0 & \end{array}$$

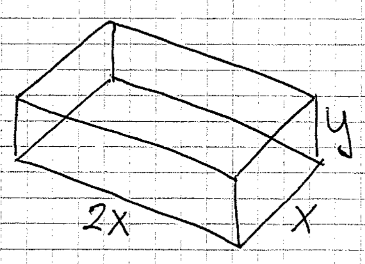
$$z^3+8 = (z+2)(z^2-2z+4)$$

-2 nollställe

$$z^2-2z+4=0 \iff z = 1\pm i\sqrt{3}$$

Svar: $\begin{cases} z_1 = 2i \\ z_2 = -2i \\ z_3 = -2 \\ z_4 = 1+i\sqrt{3} \\ z_5 = 1-i\sqrt{3} \end{cases}$

6.



$$2x^2y = 400$$

$$y = \frac{200}{x^2}$$

Kostnaden $= 2x^2 \cdot 7 + 6xy \cdot 5 + 2x^2 \cdot 5$

$$K(x) = 14x^2 + 30x\frac{200}{x^2} + 10x^2 =$$

$$= 24x^2 + \frac{6000}{x}, \quad x > 0.$$

$$K'(x) = 48x - \frac{6000}{x^2} = 0$$

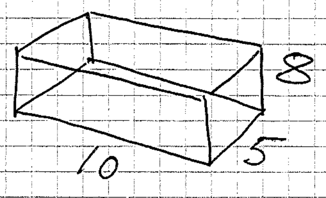
$$x^3 = \frac{\cancel{6} \cdot 1000}{\cancel{6} \cdot 8}$$

$$x = \frac{10}{2} = 5.$$

x		5	
$K'(x)$	$-$	0	$+$
$K(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

$x = 5$ ger K_{min}.

Svar:



7. Bilda $f(x) = \dfrac{e^{-2x}}{x}, \quad x \neq 0.$

$$f'(x) = \frac{-2e^{-2x}x - e^{-2x}}{x^2} = \frac{-\overset{>0}{e^{-2x}}(1+2x)}{x^2}$$

x		$-1/2$		0	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	#	$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$

$$y = \frac{e^{-2x}}{x}$$

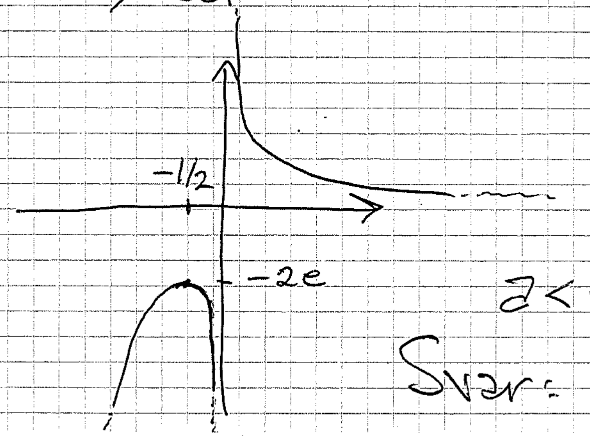
x	y
$-1/2$	$-2e$
$\to 0^-$	$\to -\infty$
$\to 0^+$	$\to \infty$
$\to \infty$	$\to 0$
$\to -\infty$	$\to -\infty$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{xe^{2x}} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^{-2x}}{x} = -\infty$$

standard.

($e^{2\infty}$ snabbare. jfr. med $-\infty$.)



$$\frac{e^{-2x}}{x} = a$$

$a < -2e \Leftrightarrow 2$ rötter.

Svar: $a < -2e$.