Linköpings universitet
Magnus Berggren, MAI

Tentamen i Analys i en variabel del 1, utbildningskod TAIU10, modul TEN1. 2021-08-16 , kl 8.00 – 13.00

Penna,radergummi,linjal,passare och gradskiva får användas. Formelsamlingar och andra hjälpmedel är ej tillåtna. Lösningarna skall vara fullständiga,välmotiverade,ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Uppgifterna bedöms med 0 – 3 poäng. För betyg n ($n = 3, 4$ eller 5) krävs minst $4(n\text{-}1)$ poäng. Godkänd dugga 1 och dugga 2 ger vardera 1 p. Observera att bonus enbart gäller för betyget 3. Skriv på omslaget hur många bonuspoäng (B=0,B=1 eller B=2) du har.

---

1)

a) Bestäm definitionsmängden för funktionen $f(x) = \ln \frac{1-x}{x-2}$. (1p)

b) Lös ekvationen $8^x - 2^{2x+1} - 2^x + 2 = 0$. (1p)

c) Bestäm den inversa funktionen till $f(x) = \frac{e^{3x}}{2}$. (1p)

2) a) Lös olikheten $\cos 4x < \frac{1}{2}$. (1p)

b) Bestäm alla lösningar till ekvationen $\sin^2 x + 2\cos x + 2 = 0$. (2p)

3) a) Bestäm alla lösningar, reella såväl som komplexa, till ekvationen $z^4 - z^3 + z - 1 = 0$. Svara på formen $a + ib$. (2p)

b) Räkna ut absolutbeloppet $|z|$ då $z = \frac{(1+i\sqrt{3})^6}{(1-i)^4}$. (1p)

4) Rita grafen till funktionen $f(x) = \frac{e^{3x}}{x+2}$. Eventuella asymptoter och stationära punkter skall framgå ur figuren.

5) Beräkna följande gränsvärden

a) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-x-2}{x-2}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{5x}-1}{\sin 3x}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2-5x+4} - \sqrt{x^2-x}\,\right)$

6) Undersök hur många reella nollställen polynomet $p(x) = 3x^3 - x^2 + x + 1$ har. Bestäm i vilka/vilket intervall av längd 1 eventuella reella nollställen ligger.

7) För vilka värden på konstanten a har ekvationen $\frac{x^3}{x^2-1} = a$ exakt tre olika reella lösningar?

Kortfattade lösningsförslag.

1 a. $f(x) = \ln \dfrac{1-x}{x-2}$ Sök D_f.

Krav: $\dfrac{1-x}{x-2} > 0 \iff 1 < x < 2$.

x		1		2	
$\dfrac{1-x}{x-2}$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$

Svar: $D_f = \{ x \in \mathbb{R} : 1 < x < 2 \}$

b. $8^x - 2^{2x+1} - 2^x + 2 = 0$

$(2^x)^3 - 2(2^x)^2 - 2^x + 2 = 0$

/ Sub. $t = 2^x$, $t > 0$ /

$t^3 - 2t^2 - t + 2 = 0$

$(t-1)(t^2 - t - 2) = 0$

$(t-1)(t+1)(t-2) = 0$

$2^x = 1 \Rightarrow x = 0$

$2^x = 2 \Rightarrow x = 1$

Svar: $\begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$

1c. $f(x) = \dfrac{e^{3x}}{2}$ strängt väx.

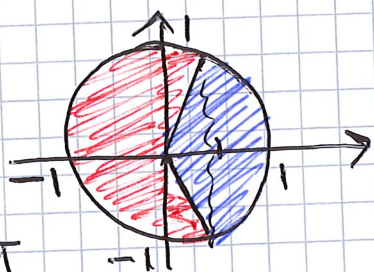
Sök invers.

$$y = \frac{e^{3x}}{2} \iff 2y = e^{3x} \iff$$

$$\ln 2y = 3x \iff x = \frac{1}{3}\ln 2y.$$

Svar: $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}\ln 2x \quad , \quad x > 0$

2a. $\cos 4x < \frac{1}{2}$



$$\iff$$

$$\frac{\pi}{3} + n2\pi < 4x < \frac{5\pi}{3} + n2\pi$$

$$\iff$$

$$\frac{\pi}{12} + \frac{n\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{12} + \frac{n\pi}{2} \quad , \quad n \in \mathbb{Z}.$$

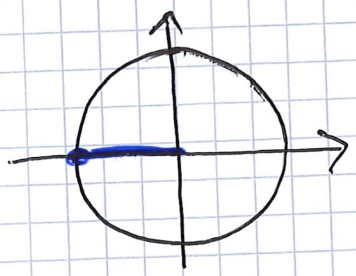
2b. $\sin^2 x + 2\cos x + 2 = 0$

$$1 - \cos^2 x + 2\cos x + 2 = 0$$

$/ \text{Sub. } t = \cos x \quad , \quad -1 \le t \le 1 /$

$$-t^2 + 2t + 3 = 0$$

$$\iff$$



$$\begin{cases} \cancel{t_1 = 3} \\ t_2 = -1 = \cos x \end{cases} \qquad x = \pi + n2\pi \quad , \quad n \in \mathbb{Z}.$$

---

3 a. $z^4 - z^3 + z - 1 = 0$

Gissar $z_1 = -1$, $z_2 = 1$

Faktorsatsen ger att $(z+1)(z-1)$ ingår som faktor.

$$z^4 - z^3 + z - 1 = (z^2 - 1)(z^2 - z + 1) = 0$$

polynomdiv. osv.

$$z^2 - z + 1 = 0 \iff$$

$$z = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Svar: $z_1 = -1$, $z_2 = 1$

$z_{3,4} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

---

3 b. $$|z| = \left| \frac{(1+i\sqrt{3})^6}{(1-i)^4} \right| = \frac{|1+i\sqrt{3}|^6}{|1-i|^4} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}\right)^6}{\left(\sqrt{1^2 + (-1)^2}\right)^4} = \frac{2^6}{(\sqrt{2})^4} = \frac{2^6}{2^2} = 2^4$$

Svar: $|z| = 16$

---

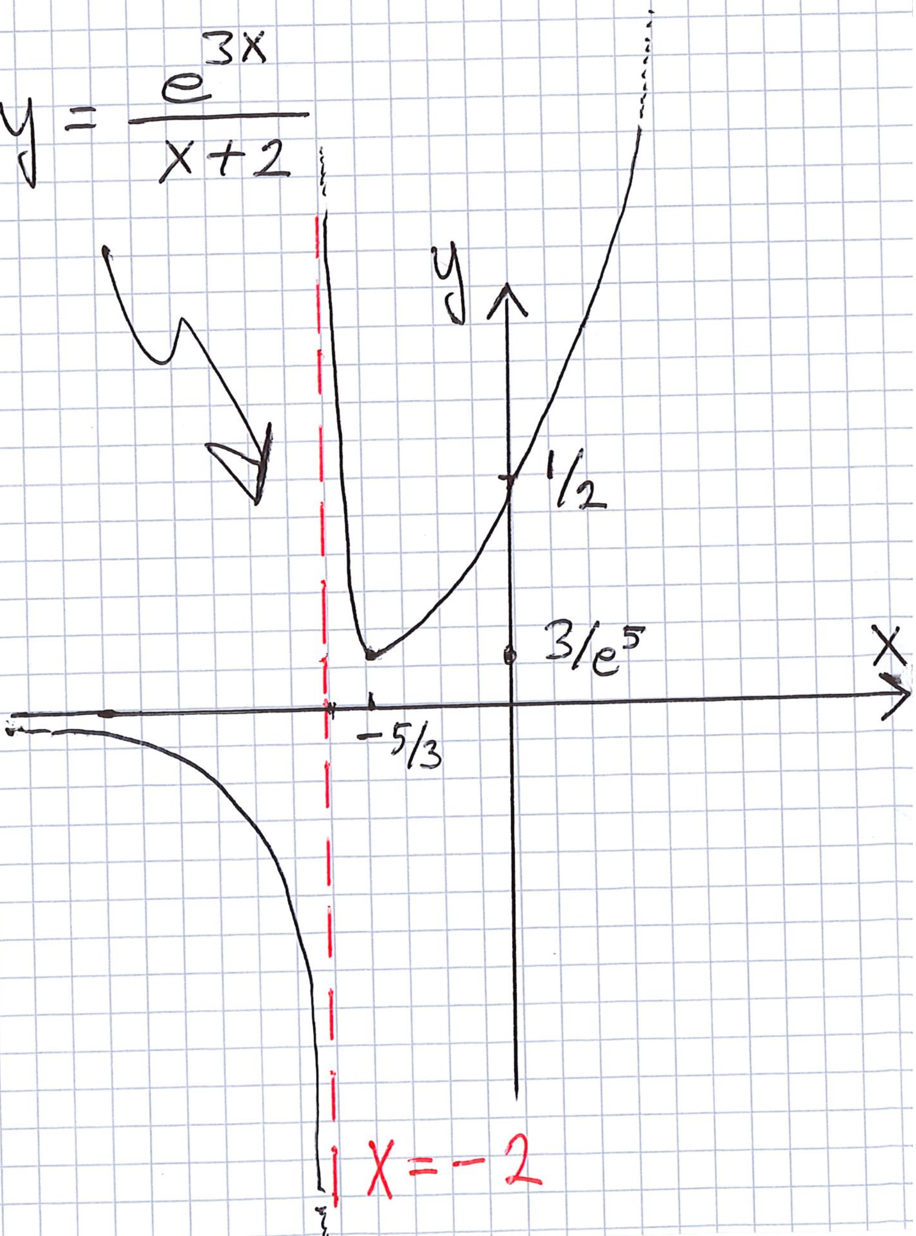
4. $f(x) = \dfrac{e^{3x}}{x+2}$, $x \neq -2$

$$f'(x) = \frac{3e^{3x}(x+2) - e^{3x}}{(x+2)^2} = \frac{\underbrace{e^{3x}}_{>0}(3x+5)}{\underbrace{(x+2)^2}_{\geq 0}}$$

x		-2		$-5/3$	
$f'(x)$	$-$	∄	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	∄	↘		↗

Värdetabell $\quad y = \dfrac{e^{3x}}{x+2}$

x	y
$\to -2^+$	$\to \infty$
$\to \infty$	$\to \infty$
$-5/3$	$3e^{-5} \approx 0$
$\to -2^-$	$\to -\infty$
$\to -\infty$	$\to 0$
0	$\frac{1}{2}$



5a. $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = 3$

L: $\frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \frac{(x-2)(x+1)}{x-2} = x + 1 \to 3$ då $x \to 2$

5b. $\lim_{x \to 0} \frac{e^{5x} - 1}{\sin 3x} = \frac{5}{3}$

L: Standardgr.v. $\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1}$ $\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$

$$\frac{e^{5x} - 1}{\sin 3x} = \underbrace{\frac{e^{5x} - 1}{5x}}_{\to 1} \cdot \frac{1}{\underbrace{\frac{\sin 3x}{3x}}_{\to 1}} \cdot \frac{5}{3} \to \frac{5}{3}$$

då $x \to 0$

5c. $\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 - 5x + 4} - \sqrt{x^2 - x} \right) =$

konjugatet osv.

$$\ldots = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 5x + 4 - (x^2 - x)}{\sqrt{x^2 - 5x + 4} + \sqrt{x^2 - x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-4x+4}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}+\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x}\left(-4+\underbrace{\frac{4}{x}}_{\to 0}\right)}{\cancel{x}\left(\sqrt{1-\underbrace{\frac{5}{x}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{4}{x^2}}_{\to 0}}+\sqrt{1-\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}}\right)}$$

$\sqrt{x^2} = |x| = x$, $x > 0$

$$= \frac{-4}{1+1} = -2$$

Svar: -2.

---

6. $p(x) = 3x^3 - x^2 + x + 1$

Antal reella nollställen?

Tänk graf ritning.

$$p'(x) = 9x^2 - 2x + 1 = 9\left(x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{1}{9}\right) =$$

$$9\left(\left(x-\frac{1}{9}\right)^2 - \frac{1}{81} + \frac{9}{81}\right) =$$

$$9\left(\left(x-\frac{1}{9}\right)^2 + \frac{8}{81}\right) = 9\left(x-\frac{1}{9}\right)^2 + \frac{8}{9} > 0$$

$\Longrightarrow$ $p(x)$ strängt växande.

$p(x)$ kontinuerlig. $V_p =]-\infty, \infty[$

Ger exakt ett reellt nollställe

forts. nr 6.

$p(-1) = 3(-1)^3 - (-1)^2 - 1 + 1 = -4 < 0$

$p(0) = 3 \cdot 0^3 - 0^2 + 0 + 1 = 1 > 0$

$p(x)$ kont. o strängt växande.

Svar: $p(x)$ har exakt ett reellt nollställe och det ligger i intervallet $]-1, 0[$.

---

7. $\frac{x^3}{x^2-1} = a$ skall studeras.

Bilda $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$ och tänk "grafritning".

udda

$x \neq \pm 1$

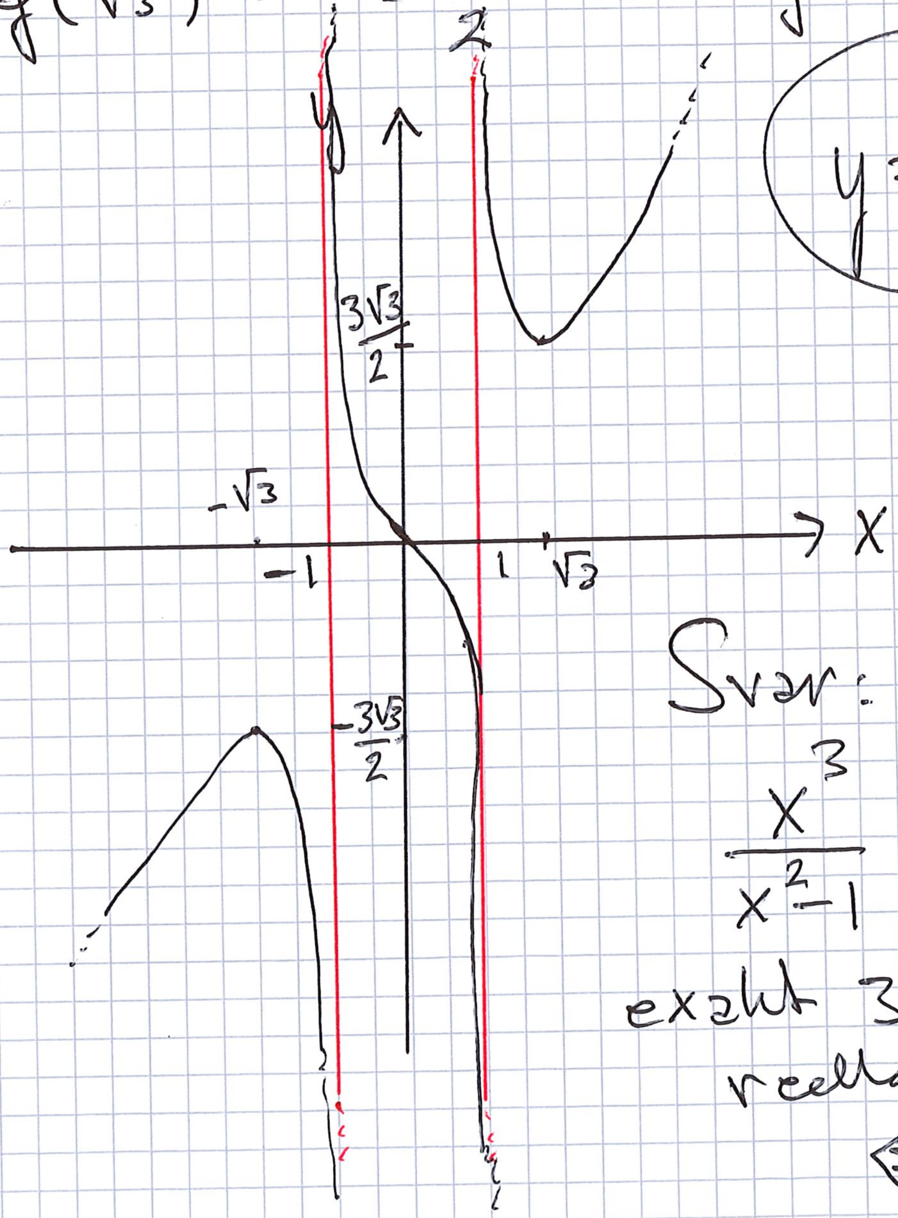
$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2-1) - 2x \cdot x^3}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{(x^2-1)^2}.$$

x		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$-$		$-$	$\nexists$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$	$\nexists$	$\searrow$	0	$\searrow$	$\nexists$	$\searrow$		$\nearrow$

Värdetabell med <u>gränsvärden</u>
... osv.

$f(\sqrt{3}) = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ ger.

$$y = \frac{x^3}{x^2-1}$$



Svar: Ekv.

$$\frac{x^3}{x^2-1} = a \text{ har}$$

exakt 3 olika reella lösningar

$$\Longleftrightarrow$$

$$|a| > \frac{3\sqrt{3}}{2}$$