Linköpings universitet
Magnus Berggren, MAI

Tentamen i Analys i en variabel del 1, utbildningskod TAIU10, modul TEN1. 2021-10-29, kl 8.00 – 13.00

Penna,radergummi,linjal,passare och gradskiva får användas. Formelsamlingar och andra hjälpmedel är ej tillåtna. Lösningarna skall vara fullständiga,välmotiverade,ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Uppgifterna bedöms med 0 – 3 poäng. För betyg n (n = 3, 4 eller 5) krävs minst 4(n-1) poäng. Godkänd dugga 1 och dugga 2 ger vardera 1 p. Observera att bonus enbart gäller för betyget 3. Skriv på omslaget hur många bonuspoäng (B=0,B=1 eller B=2) du har.

---

1) Lös ekvationerna

a) $\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\cos^2 x + 4\sin x - 4 = 0$ c) $\ln x - \ln(3x+2) + \ln(x+4) = 0$.

2) Bestäm värdemängden V_f för $f(x) = \frac{e^{-3x}}{x-1}$.

3) Beräkna följande gränsvärden

a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2+2x-3}{x^2-3x+2}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+x+1} - x\right)$ c) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{e^{x-1}-1}{\sin(4x-4)}$

4) Rita grafen till funktionen $f(x) = \frac{x^2}{x^2-4}$. Ange eventuella lokala extrempunkter, samt lodräta och vågräta asymptoter.

5) Bestäm alla lösningar, reella såväl som komplexa, till ekvationen $z^5 - z^4 + 16z - 16 = 0$. Svara på formen $a + ib$.

6) Bestäm konstanterna a och b så att funktionen

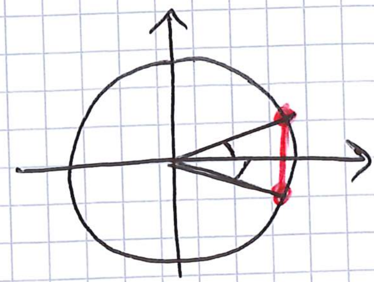
$$f(x)=\begin{cases} e^{3x} + x, & x \geq 0, \\ ax + b, & x < 0 \end{cases}$$

blir deriverbar för alla x.

7) För vilka reella tal x gäller olikheten $\arctan x \geq \frac{x}{x^2+1}$.

Kortfattade lösningsförslag till tentamen TAIU10 del 1. 2021-10-29.

1 a. $$\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$\Longleftrightarrow$$

$$2x+\frac{\pi}{6}=\begin{cases}\pi/6+n2\pi\\ -\pi/6+n2\pi\end{cases},\quad n\in\mathbb{Z}$$

Svar: $$x=\begin{cases}n\pi\\ -\dfrac{\pi}{6}+n\pi\end{cases},\quad n\in\mathbb{Z}.$$

---

1 b. $$\cos^2 x+4\sin x-4=0$$

$/$ trig. ettan $\cos^2 x = 1-\sin^2 x$ $/$

$$1-\sin^2 x+4\sin x-4=0 \qquad \Big/\ t=\sin x,\ -1\le t\le 1\ \Big/$$

$$-t^2+4t-3=0$$

$$t^2-4t+3=0 \Longleftrightarrow t=\begin{cases}1\\ \cancel{3}\end{cases}$$

$$\sin x = 1$$

$$\Longleftrightarrow\ x=\frac{\pi}{2}+n2\pi,\quad n\in\mathbb{Z}.$$

Svar:

1c. $\ln x - \ln(3x+2) + \ln(x+4) = 0$

/ Krav: $x > 0$ /

$\ln(x+4) + \ln x = \ln(3x+2)$ / Log. lag. $\ln ab = \ln a + \ln b$ /

$\ln(x^2+4x) = \ln(3x+2)$

$x^2 + 4x = 3x + 2$ / ln strängt väx.

$x^2 + x - 2 = 0$

$x = 1$ eller $x = -2$ men $x = -2$ uppfyller ej kravet.

Kontroll.

$\underset{x=1}{V.L} = \ln 1 - \ln 5 + \ln 5 = \ln 1 = 0 = H.L$

Svar: $x = 1$

2. $f(x) = \dfrac{e^{-3x}}{x-1}, \quad x \neq 1.$

$$f'(x) = \frac{-3e^{-3x}(x-1) - e^{-3x}}{(x-1)^2} =$$

$$\frac{e^{-3x}(-3x+3-1)}{(x-1)^2} = \frac{\overset{>0}{e^{-3x}}(2-3x)}{\underset{>0}{(x-1)^2}}$$

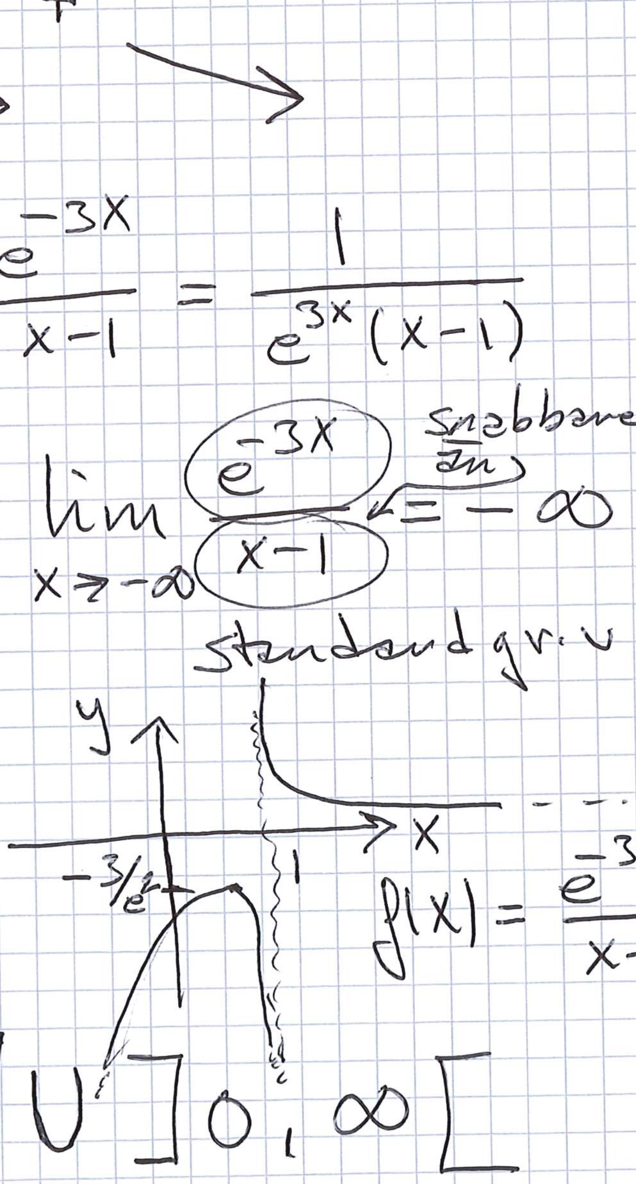
x		$2/3$		1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$

x	y
$2/3$	$\dfrac{e^{-2}}{-\frac{1}{3}} = \dfrac{-3}{e^2}$
$\to \infty$	$\to 0$
$\to -\infty$	$\to -\infty$
$\to 1^-$	$\to -\infty$
$\to 1^+$	$\to \infty$

$$y = \frac{e^{-3x}}{x-1} = \frac{1}{e^{3x}(x-1)}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^{-3x}}{x-1} \underset{\text{snabbare än}}{\leftarrow} = -\infty$$

standard gr.v.



$f(x) = \dfrac{e^{-3x}}{x-1}$

Svar: $V_f =]-\infty, \frac{-3}{e^2}] \cup]0, \infty[$

3a. $$\frac{x^2+2x-3}{x^2-3x+2} \underset{\uparrow}{=} \frac{\cancel{(x-1)}(x+3)}{\cancel{(x-1)}(x-2)} =$$

/faktorsetsen/

$$= \frac{x+3}{x-2} \longrightarrow \frac{4}{-1} = -4 \quad \text{då } x \to 1.$$

Svar: $$\lim_{x \to 1} \frac{x^2+2x-3}{x^2-3x+2} = -4$$

3b. $$\left(\sqrt{x^2+x+1} - x\right) = /\text{konj.}/ =$$

$$\frac{x^2+x+1-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}+x} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+x} =$$

$$\underset{\uparrow}{=} \frac{\cancel{x}\left(1+\overset{\to 0}{\frac{1}{x}}\right)}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\underset{\to 0}{\frac{1}{x}}+\underset{\to 0}{\frac{1}{x^2}}}+1\right)} \longrightarrow \frac{1}{2}$$

då $x \to \infty$.

/Dominerande faktor/ bryt ut.

Svar: $\frac{1}{2}$

3c. $\lim_{x\to 1} \frac{e^{x-1}-1}{\sin(4(x-1))} = \left/ \begin{array}{c} t = x-1 \\ x\to 1 \Rightarrow \\ t\to 0 \end{array} \right/ =$

$= \lim_{t\to 0} \frac{e^{t}-1}{\sin 4t} = \lim_{t\to 0} \underbrace{\frac{e^{t}-1}{t}}_{\to 1} \cdot \frac{1}{\underbrace{\frac{\sin 4t}{4t}}_{\to 1}} \cdot \frac{1}{4}$

standardgr.v.

$= 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

Svar: Gr.v $= \frac{1}{4}$

---

4. $f(x) = \frac{x^2}{x^2-4} = 1 + \underbrace{\frac{4}{x^2-4}}_{\to 0 \text{ då } x\to\pm\infty}$

Polynomdiv.

$y=1$ asymptot då $x \to \pm\infty$.

$f(-x) = f(x)$ för alla $x \in D_f$.

dvs f är jämn.

$f'(x) = \frac{2x(x^2-4) - x^2 \cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{-8x}{(x^2-4)^2}$

forts.

x		-2		0		2	
$f'(x)$	$+$	$\nexists$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\nexists$	$\nearrow$		$\searrow$	$\nexists$	$\searrow$

x	y
0	0
$\to 2^-$	$\to -\infty$
$\to 2^+$	$\to \infty$
$\to \infty$	$\to 1$
$\to -2^+$	$\to -\infty$
$\to -2^-$	$\to \infty$
$\to -\infty$	$\to 1$

$$y = \frac{x^2}{x^2-4}$$

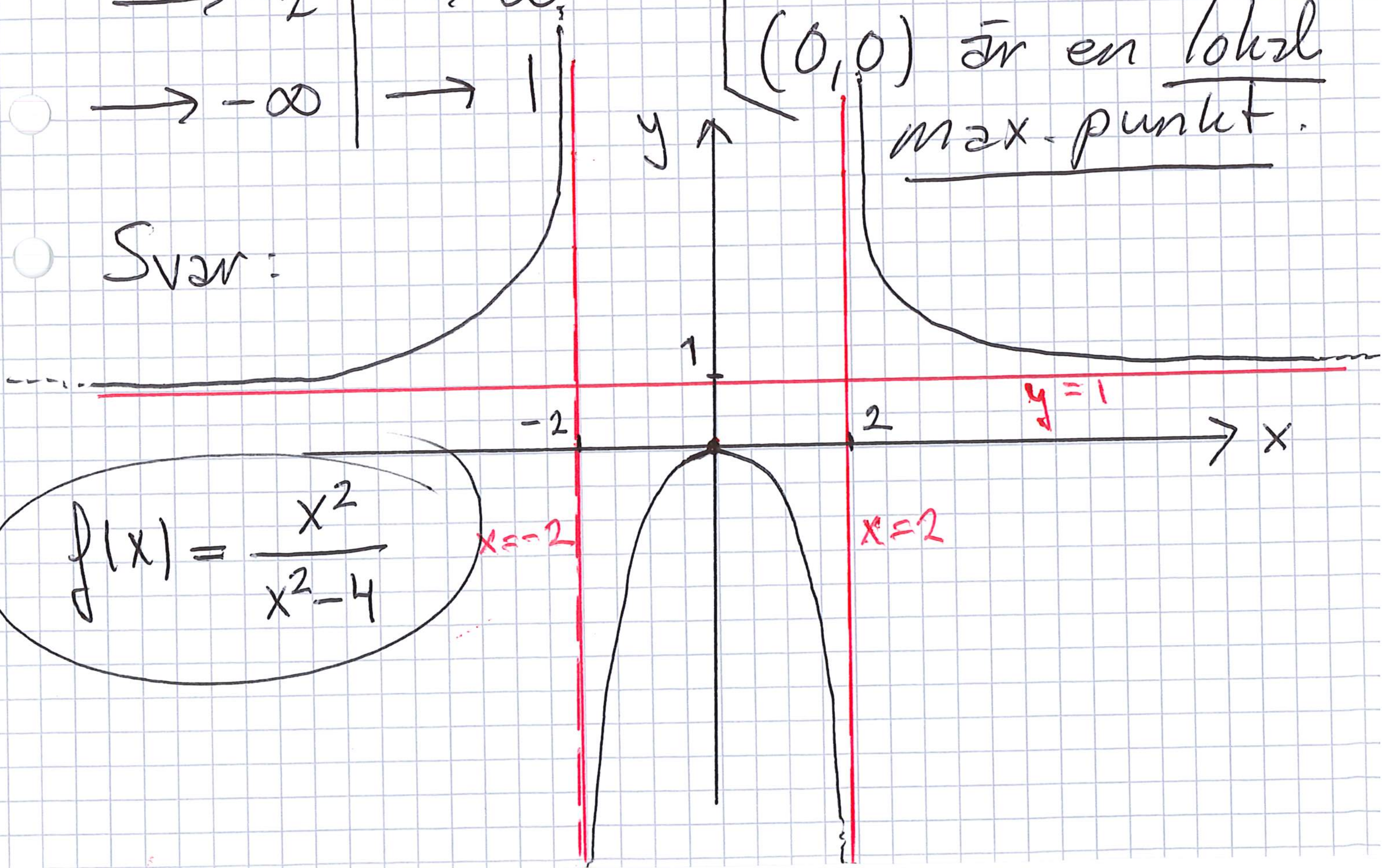
$x = \pm 2$ utgör <u>vertikala</u> <u>asymptoter</u>

$y = 1$ <u>vågrät asymptot</u> då $x \to \pm\infty$.

$(0,0)$ är en <u>lokal</u> <u>max-punkt</u>.

Svar:

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2-4}$$



5. $z^5 - z^4 + 16z - 16 = 0$

$p(z) = z^5 - z^4 + 16z - 16$

$p(1) = 0 \iff (z-1)$ ingår som faktor

$p(z) = (z-1)(z^4+16)$

När är $z^4 + 16 = 0$?

$\iff z^4 = -16$ Binomisk ekv.

$/$ Sub. $z = re^{i\theta}$ $/$

$r^4 e^{i4\theta} = 16 e^{i\pi} \iff$

$$\begin{cases} r^4 = 16 \Rightarrow r = 2 \\ 4\theta = \pi + k2\pi, \quad k = 0,1,2,3. \end{cases}$$

$$z = 2e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right)}$$

$(k=0)$ $z = 2e^{i\frac{\pi}{4}} = 2\left(\underbrace{\cos\frac{\pi}{4}}_{=1/\sqrt{2}} + i\underbrace{\sin\frac{\pi}{4}}_{=1/\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

$\vdots$ osv.

Svar: 5 st rötter.

$1, \quad \sqrt{2} \pm i\sqrt{2}, \quad -\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}$

6.

$$f(x) = \begin{cases} e^{3x} + x &, \quad x \geq 0 \\ ax + b &, \quad x < 0 \end{cases}$$

Endast problem för $x = 0$.

$$f'(x) = \begin{cases} 3e^{3x} + 1 &, \quad x > 0 \\ a &, \quad x < 0 \end{cases}$$

f kont. för $x = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$

$$\lim_{x \to 0^+} (e^{3x} + x) = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} (ax + b) = b \quad \text{samt } f(0) = 1$$

ger $b = 1$.

f deriverbar för $x = 0$ om

$f'_+(0) = 4 = f'_-(0) = a$. ger $a = 4$.

Svar: $a = 4$, $b = 1$ gör f deriverbar för alla x.

7. $\arctan x \geq \dfrac{x}{x^2+1}$

$\Leftrightarrow \quad \arctan x - \dfrac{x}{x^2+1} \geq 0$

Bilda $f(x) = \arctan x - \dfrac{x}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$

för vilka x är $f(x) \geq 0$?

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \left(\frac{x^2+1 - x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} \right) =$$

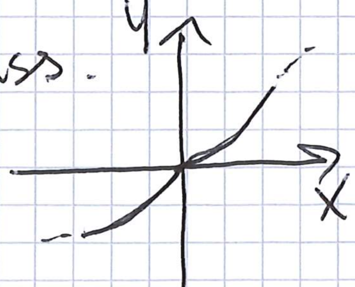
$$= \frac{x^2+1-(1-x^2)}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^2}{(x^2+1)^2}$$

x		0	
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\nearrow$

f kontinuerlig

$$f(0) = \arctan 0 - \frac{0}{0^2+1} = 0 - 0 = 0$$

Skiss.



Svar: $x \geq 0$