Linköpings universitet
Magnus Berggren, MAI

Tentamen i Analys i en variabel del 1, utbildningskod TAIU10, modul TEN1. 2022-01-07, kl 8.00 – 13.00

Penna,radergummi,linjal,passare och gradskiva får användas. Formelsamlingar och andra hjälpmedel är ej tillåtna. Lösningarna skall vara fullständiga,välmotiverade,ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Uppgifterna bedöms med 0 – 3 poäng. För betyg n ($n = 3, 4$ eller 5) krävs minst $4(n\text{-}1)$ poäng. Godkänd dugga 1 och dugga 2 ger vardera 1 p. Observera att bonus enbart gäller för betyget 3. Skriv på omslaget hur många bonuspoäng (B=0,B=1 eller B=2) du har.

---

1) Rita funktionen $y(x) = x^4e^{-2x}$. Eventuella asymptoter och stationära punkter skall framgå ur figuren.

2)
   a) Bestäm alla lösningar, reella såväl som komplexa, till ekvationen $z^4 - 4z^3 + 4z^2 + 4z - 5 = 0.$ (2p)

   b) Bestäm belopp och argument till $z = \frac{(\sqrt{3}-i)^3(1-i)}{1+i}$. (1p)

3) Beräkna följande gränsvärden

   a) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+9x} - x)$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}(\ln(5x+3) - \ln(2x-4))$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\sin^2 x}-1}{x\tan x}$.

4) I en rätvinklig låda med kvadratisk bottenyta är höjden och sidan i bottenytan tillsammans 6 dm. Bestäm lådans största möjliga volym.

5)
   a) Lös ekvationen $\sin 3x = \sin\left(\frac{\pi}{3} - 7x\right)$. (1p)

   b) Bestäm alla lösningar till $2\cos^2 x = 2 + \sin x$. (2p)

6) Betrakta kurvan $y = e^{-2x^2}$. Var kan en tangent till kurvan skära y-axeln?

7) Låt $f(x)=\frac{\sin x}{x}$, $0 < x < \pi$. Visa att f har en invers funktion $g = f^{-1}$ samt beräkna $g'\left(\frac{2}{\pi}\right)$.

Kortfattade lösningsförslag till tentamen i Analys i en variabel del 1. TAIU10. 2022-01-07.

1. $y(x) = x^4 e^{-2x}, \quad x \in \mathbb{R}$.

$y'(x) = 4x^3 e^{-2x} + x^4 e^{-2x}(-2) =$

$e^{-2x}(4x^3 - 2x^4) = \underbrace{e^{-2x}}_{>0} x^3 (4 - 2x) = 0 ?$

$x = 0$

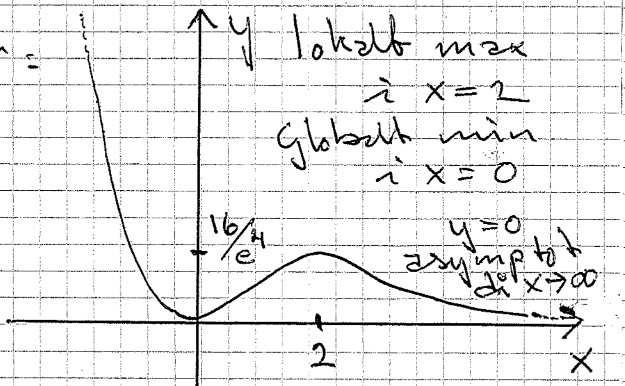
samt $x = 2$.

x		0		2	
$y'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$y(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

Värdetabell $\quad y = \dfrac{x^4}{e^{2x}} \to 0$ då $x \to \infty$. standardgr.v.

x	$y = x^4 e^{-2x}$
$\to -\infty$	$\to \infty$
0	0
2	$\dfrac{16}{e^4}$
$\to \infty$	$\to 0$

Svar:



2 a. $p(z) = z^4 - 4z^3 + 4z^2 + 4z - 5$

$p(1) = 0 \iff (z-1)$ ingår som faktor.

$p(z) \underset{\uparrow}{=} (z-1)(\underbrace{z^3 - 3z^2 + z + 5}_{-1 \text{ nollställe}}) =$

Polynomdivision.

$= (z-1)(z+1)(z^2 - 4z + 5)$

till sist. $z^2 - 4z + 5 = 0$

$\iff (z-2)^2 + 1 = 0$

$z - 2 = \pm i$

$\iff z = 2 \pm i$

Svar: $z_1 = 1, \ z_2 = -1, \ z_{3,4} = 2 \pm i$

2 b. $z = \dfrac{(2e^{-i\pi/6})^3 (\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}})}{\sqrt{2} e^{i\pi/4}} =$

Rita.

$8 e^{-i\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-i\frac{\pi}{2}} = 8 e^{-i\pi}$

Svar: $|z| = 8, \quad \arg z = \pi + k2\pi, \ k \in \mathbb{Z}$.

3. a. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+9x}-x\right)$

typ $[\infty-\infty]$.

$$\sqrt{x^2+9x}-x = \frac{x^2+9x-x^2}{\sqrt{x^2+9x}+x} =$$

Konjugatet.

$$= \frac{9x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{9}{x}\right)}+x} = \frac{\cancel{x}\,9}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\underbrace{\frac{9}{x}}_{\to 0}}+1\right)} \to \frac{9}{2}$$

då $x\to\infty$.

Svar: $\frac{9}{2}$

---

3 b. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\ln(5x+3)-\ln(2x-4)\right) =$

$$= \lim_{x\to\infty}\ln\frac{5x+3}{2x-4} = \lim_{x\to\infty}\ln\frac{5+\overbrace{\frac{3}{x}}^{\to 0}}{2-\underbrace{\frac{4}{x}}_{\to 0}} =$$

$$= \ln\frac{5}{2}$$

Svar: $\ln\frac{5}{2}$

---

3 c. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\sin^2 x}-1}{x\tan x} = \left[\text{typ}\left[\frac{0}{0}\right]\right] =$

$$= \lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{e^{\sin^2 x}-1}{\sin^2 x}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\frac{\sin^2 x}{x^2}}_{\to 1^2}\cdot\frac{1}{\underbrace{\frac{\tan x}{x}}_{\to 1}} = 1$$

Standardgränsvärden.

$\sin x\to 0$ då $x\to 0$

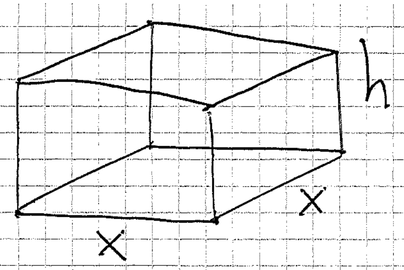
$\frac{e^t-1}{t}\to 1$ då $t\to 0$

$\frac{\sin t}{t}\to 1$ då $t\to 0$

$\frac{\tan t}{t}\to 1$ då $t\to 0$.

Svar: 1

4.



$h + x = 6$ dm

$h = 6 - x$

$V = x^2 h$

$V(x) = x^2(6-x) = 6x^2 - x^3, \quad 0 \le x \le 6$

$V'(x) = 12x - 3x^2 = 3x(4-x)$

x	0		4		6
$V'(x)$		+	0	−	
$V(x)$		↗		↘	

V_{max} fås då $x = 4$.

$V(4) = 4^2(6-4) = 32\ dm^3$

Svar: Lådans största möjliga volym är 32 liter.

5a. $\sin 3x = \sin\left(\frac{\pi}{3} - 7x\right) \iff$

$$3x = \begin{cases} \frac{\pi}{3} - 7x + n2\pi \\ \pi - \left(\frac{\pi}{3} - 7x\right) + n2\pi \end{cases} \iff x = \begin{cases} \frac{\pi}{30} + \frac{n\pi}{5} \\ -\frac{\pi}{6} - \frac{n\pi}{2} \end{cases}$$

$n \in Z$. Svar:

Rita enhets-cirkeln.

5b. $2\cos^2 x = 2 + \sin x$

/ trig-ettan $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ /

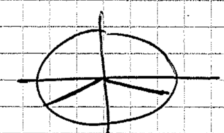
$\iff 2(1 - \sin^2 x) = 2 + \sin x \iff$

$-2\sin^2 x + 2 = 2 + \sin x \iff$

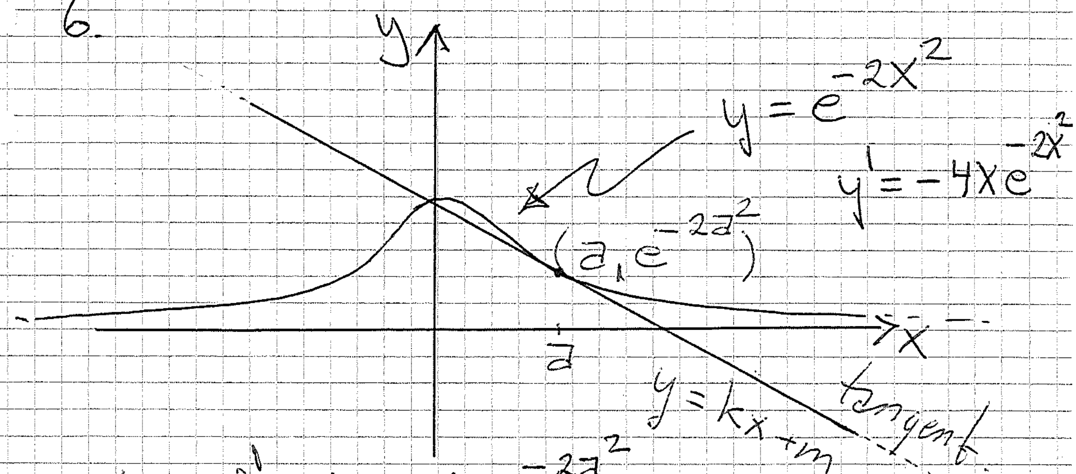
$\sin x(1 + 2\sin x) = 0 \iff$

$$\sin x = \begin{cases} 0 \\ -1/2 \end{cases} \iff x = \begin{cases} n\pi \\ \frac{7\pi}{6} + n2\pi \\ -\pi/6 + n2\pi \end{cases}, n \in Z.$$

Svar:



6.



$k = f'(a) = -4ae^{-2a^2}$

forts nr 6. tangentens ekv.

$$y = -4ae^{-2a^2}x + m \text{ går}$$

genom punkten (a, e^{-2a^2}) vilket

ger $e^{-2a^2} = -4a^2e^{-2a^2} + m$

$$m = (1+4a^2)e^{-2a^2}$$

m = tangentens skärning med y-axeln.

$$m(a) = (1+4a^2)e^{-2a^2}, \quad a \geq 0$$

p.g.a symmetrin

Bestäm V_m.

$$m'(a) = 8ae^{-2a^2} + (1+4a^2)(-4a)e^{-2a^2} =$$

$$= e^{-2a^2}(4a - 16a^3) = 4ae^{-2a^2}(1-4a^2)$$

a	0		1/2	
$m'(a)$		+	0	−
$m(a)$		↗		↘

$m(1/2) = 2e^{-1/2}$

$m(0) = 1$

$m \to 0$ då $a \to \infty$.

Svar: $V_m =]0, \frac{2}{\sqrt{e}}]$

7. $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}, \quad 0 < x < \pi$

$$f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$$

Bilder $g(x) = x\cos x - \sin x$

$g'(x) = \cos x - x\sin x - \cos x =$

$= -x\sin x < 0$ för $0 < x < \pi$.

alltså

x	0		π
$f'(x)$		−	
$f(x)$		↘	

f strängt avtagande på $]0, \pi[$

$\Longrightarrow f$ injektiv (har invers).

$$g'\left(\frac{2}{\pi}\right) = \frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{\dfrac{\frac{\pi}{2}\overbrace{\cos\frac{\pi}{2}}^{=0} - \overbrace{\sin\frac{\pi}{2}}^{=1}}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}}$$

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\overbrace{\sin\frac{\pi}{2}}^{=1}}{\frac{\pi}{2}}$$

Svar: $g'\left(\frac{2}{\pi}\right) = -\dfrac{\pi^2}{4}$