Linköpings universitet
Magnus Berggren, MAI

Tentamen i Analys i en variabel del 1, utbildningskod TAIU10, modul TEN1. 2022-08-15 , kl 8.00 – 13.00

Penna,radergummi,linjal,passare och gradskiva får användas. Formelsamlingar och andra hjälpmedel är ej tillåtna. Lösningarna skall vara fullständiga,välmotiverade,ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Uppgifterna bedöms med 0 – 3 poäng. För betyg n (n = 3, 4 eller 5) krävs minst 4(n-1) poäng. Godkänd dugga 1 och dugga 2 ger vardera 1 p. Observera att bonus enbart gäller för betyget 3. Skriv på omslaget hur många bonuspoäng (B=0,B=1 eller B=2) du har.

---

1) Bestäm största och minsta värde (om sådana finns) till funktionen

$$f(x)=(x-2x^2)e^{-3x}, \quad x\geq 0$$

2) a) Bestäm alla lösningar, reella såväl som komplexa, till ekvationen

$$z^3-3z^2+4z-2=0$$ (2p)

b) Bestäm belopp och argument till $z=\dfrac{\sqrt{3}+i}{1-i}$ (1p)

3) Beräkna följande gränsvärden

a) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^3-3x+2}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x+2}-\sqrt{x^2-x+1})$ c) $\displaystyle\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x-\pi}$

4) Lös ekvationerna a) $\sin 3x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\ln x^2+\ln 2x=\ln\dfrac{2}{e^2}$

c) Förenkla uttrycket $\tan(\arcsin\frac{3}{4})$ så långt som möjligt.

5) Rita grafen till funktionen $f(x)=\dfrac{2x}{x-1}+2\arctan x$. Eventuella asymptoter och stationära punkter ska framgå i figuren.

6) a) Antag att $f(x)=\dfrac{\sin x^2}{x}$ för $x\neq 0$.
Undersök om man kan definiera $f(0)$ så att f blir kontinuerlig i $x=0$. (1p)

b) Antag att $f(x)=x\arctan\dfrac{1}{x}$ för $x\neq 0$ och att $f(0)=0$.
Undersök om $f'(0)$ existerar. (2p)

7) Genom en punkt (x,y) på kurvan $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}, x>0$ dras tangenten och normalen till kurvan. Dessa begränsar tillsammans med x-axeln en triangel med arean $A(x)$. Bestäm största och minsta värde av $A(x)$ (om dessa existerar)

Kortfattade lösningsförslag till tentamen

Analys del 1. TAIU10 2022-08-15.

1. $f'(x) = (1-4x)e^{-3x} + (x-2x^2)e^{-3x}\cdot(-3) =$

$(6x^2-7x+1)e^{-3x} = (x-1)(6x-1)\underbrace{e^{-3x}}_{>0}$

$f'(x)=0 \iff \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1/6 \end{cases}$

x	0		$1/6$		1	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$f(1/6) = \left(\frac{1}{6} - 2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\right)e^{-3/6} = \frac{1}{9}e^{-1/2}$

$f(1) = -1\cdot e^{-3} = -\frac{1}{e^3} < 0$

$f(0) = 0$

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x-2x^2}{e^{3x}} = 0$ enligt. standardgr.

Skiss:

Svar: $f_{max} = \frac{1}{9\sqrt{e}}$, $f_{min} = -\frac{1}{e^3}$

2. a. $z^3 - 3z^2 + 4z - 2 = 0$

Gissa rot. $1^3 - 3\cdot 1^2 + 4\cdot 1 - 2 = 0$

1 är nollställe till 3:e grads polynomet.

$(z-1)$ ingår som faktor (faktorsatsen)

Polynomdivision ger ... kvadratkomp.

$z^3 - 3z^2 + 4z - 2 = (z-1)(z^2-2z+2) =$

$(z-1)((z-1)^2+1) =$

$(z-1)(z-1+i)(z-1-i) =$

$(z-1)(z-(1-i))(z-(1+i)) = 0$

$\iff$ Svar: $\begin{cases} z_1 = 1 \\ z_2 = 1-i \\ z_3 = 1+i \end{cases}$

2 b. $z = \frac{\sqrt{3}+i}{1-i} = \frac{2e^{i\pi/6}}{\sqrt{2}\,e^{-i\pi/4}} =$

$\frac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{\sqrt{2}} e^{i\left(\frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)} = \sqrt{2}\,e^{i\frac{5\pi}{12}}$

Svar: $|z| = \sqrt{2}$, $\arg z = \frac{5\pi}{12} + k2\pi$, k heltal.

3. a. $\frac{x^3-x^2-x+1}{x^3-3x+2} = \frac{(x-1)(x^2-1)}{(x-1)(x^2+x-2)} =$

$\frac{\cancel{(x-1)}\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)^2}\cdot(x+2)} \to \frac{2}{3}$ då $x \to 1$.

b. "förläng med konjugatet" uppe och nere.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2x+2-(x^2-x+1)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}+\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x}\left(3+\overbrace{\frac{1}{x}}^{\to 0}\right)}{\underbrace{\cancel{\sqrt{x^2}}}_{=|x|=x}\left(\sqrt{1+\underbrace{\frac{2}{x}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{2}{x^2}}_{\to 0}}+\sqrt{1-\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0}}\right)}$$

$x > 0$

$$= \frac{3}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = \frac{3}{2}$$

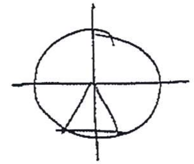
c. $\left| \begin{matrix} t = x-\pi \\ x = t+\pi \end{matrix} \right| = \lim_{t\to 0} \frac{\sin(t+\pi)}{t} =$

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin t \overbrace{\cos\pi}^{=-1} + \cos t \overbrace{\sin\pi}^{=0}}{t} = \lim_{t\to 0} -\underbrace{\frac{\sin t}{t}}_{\to 1} =$$

standardgr.

$= -1$

4. a. $\sin 3x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$



$\Longleftrightarrow$

$$3x = \begin{cases} \frac{4\pi}{3} + n2\pi \\ \frac{5\pi}{3} + n2\pi \end{cases}$$

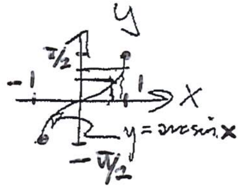
$$\Longleftrightarrow \quad x = \begin{cases} \frac{4\pi}{9} + \frac{n2\pi}{3} \\ \frac{5\pi}{9} + \frac{n2\pi}{3} \end{cases}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

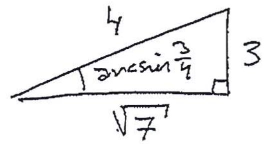
b. $\ln x^2 + \ln 2x = \ln\frac{2}{e^2}$, $x > 0$

$\Longleftrightarrow 2\ln x + \cancel{\ln 2} + \ln x = \cancel{\ln 2} - \ln e^2$

$\Longleftrightarrow 3\ln x = -2 \Longleftrightarrow x = e^{-2/3}$

c. $0 < \arcsin\frac{3}{4} < \pi/2.$





$\tan\left(\arcsin\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{\sqrt{7}}$

5. $f(x) = \frac{2x}{x-1} + 2\arctan x \quad , \; x \neq 1.$

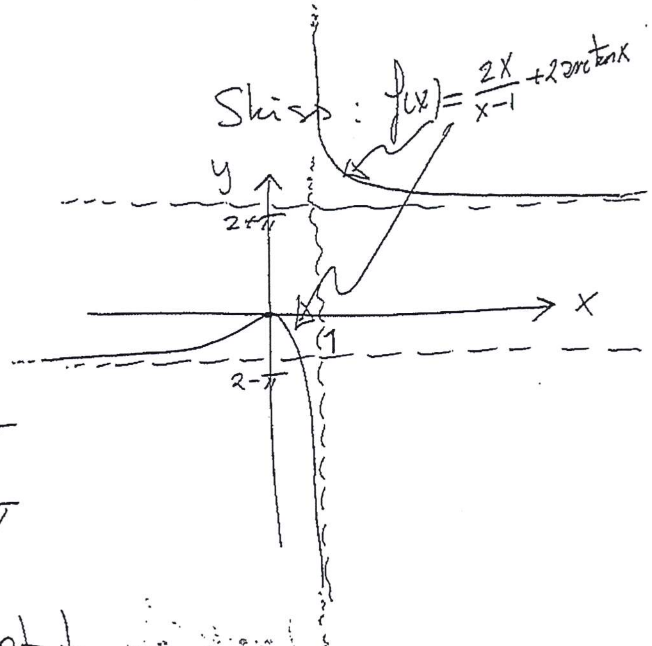
$$f'(x) = \frac{2(x-1) - 2x}{(x-1)^2} + \frac{2}{1+x^2} =$$

$$\frac{-2(1+x^2) + 2(x-1)^2}{(x-1)^2(1+x^2)} = \frac{-4x}{\underbrace{(x-1)^2}_{>0}\underbrace{(1+x^2)}_{>0}}$$

x		0		1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$	$\nexists$	$\searrow$

Värdetabell.

x	y
0	0
$\to 1^-$	$\to -\infty$
$\to 1^+$	$\to +\infty$
$\to \infty$	$\to 2+\pi$
$\to -\infty$	$\to 2-\pi$



$x = 1$ asymptot

$y = 2+\pi$ vågräta asymptoter.
$y = 2-\pi$

Lokalt max i $(0,0)$

6. a. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2}{x} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\sin x^2}{x^2}}_{\to 1} \cdot \underbrace{x}_{\to 0} = 0$

f kont. i $x=0 \iff \lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$

Svar: Ja. sätt $f(0) = 0$.

b. $f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} =$

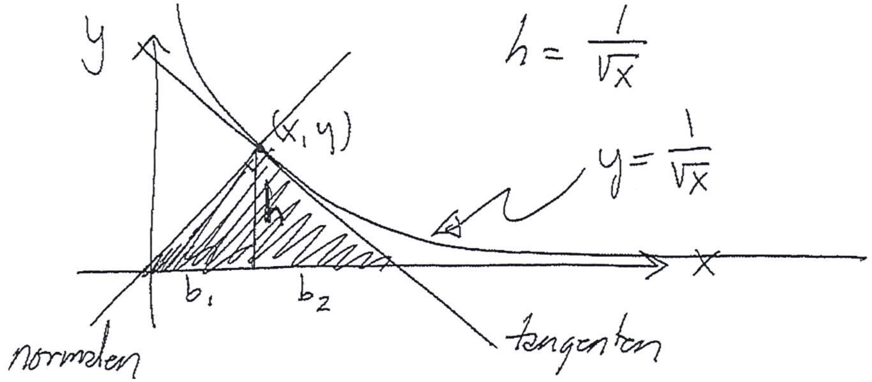
$\lim_{x\to 0} \frac{x\arctan\frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \arctan\frac{1}{x}$:

$$= \begin{cases} \lim_{x\to 0^+} \arctan\frac{1}{x} = \arctan\infty = \pi/2. \\ \lim_{x\to 0^-} \arctan\frac{1}{x} = \arctan(-\infty) = -\pi/2 \end{cases}$$

dvs. gränsvärdet exist. ej.

Svar: $f'(0)$ existerar ej.

7.



$$y' = -\frac{1}{2x\sqrt{x}} = \text{"tangentens lutning"}$$

$$\frac{h}{b_2} = \frac{1}{2x\sqrt{x}} \iff b_2 = 2x$$

$$h = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\frac{h}{b_1} = 2x\sqrt{x} \iff b_1 = \frac{1}{2x^2}$$

$$\boxed{k_t \cdot k_n = -1}$$

$$A(x) = \frac{\left(\frac{1}{2x^2} + 2x\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}}{2} = \frac{1}{4x^{5/2}} + \sqrt{x}$$

$$A'(x) = \frac{1}{4}\left(-\frac{5}{2}\right)x^{-7/2} + \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0$$

$$\iff \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{x^3 \cdot \sqrt{x}} \iff x = \sqrt[3]{\frac{5}{4}}.$$

x	0		$\sqrt[3]{\frac{5}{4}}$	
$A'(x)$		$-$	0	$+$
$A(x)$		$\searrow$		$\nearrow$

$A(x) \to \infty$ då $x \to 0^+$

$A(x) \to \infty$ då $x \to \infty$.

$$A_{min} = A\left(\sqrt[3]{\frac{5}{4}}\right) = \ldots = \underline{\underline{\frac{6}{5}\sqrt[6]{\frac{5}{4}}}}$$

<u>A_{max} saknas.</u>