Linköpings universitet
Magnus Berggren, MAI

Tentamen i Analys i en variabel del 1, utbildningskod TAIU10, modul TEN1. 2023-01-05 , kl 8.00 – 13.00

Penna,radergummi,linjal och passare får användas. Formelsamlingar och andra hjälpmedel är ej tillåtna. Lösningarna skall vara fullständiga,välmotiverade,ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Uppgifterna bedöms med 0 – 3 poäng. För betyg n (n = 3, 4 eller 5) krävs minst 4(n-1) poäng. Godkänd dugga 1 och dugga 2 ger vardera 1 p. Observera att bonus enbart gäller för betyget 3. Skriv på omslaget hur många bonuspoäng (B=0,B=1 eller B=2) du har.

---

1) Hur många reella lösningar har ekvationen $3x^4+6x^2=8x^3+2$?

2) a) Skriv $z=\dfrac{(2+2i)(1+i\sqrt{3})}{3i(\sqrt{12}-2i)}$ på polär form. (2p)

b) Finn alla komplexa tal z sådana att $\bar{z}+(1+i)z=2+\dfrac{i}{2}$. (1p)

3) Beräkna följande gränsvärden

a) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-x^2-5x-3}{x^2-x-6}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-3x})$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{3\sin 2x}$

4) Lös följande ekvationer

a) $-2\cos^2 x+\sin x+1=0$ b) $\sin 2x=|\cos x|,\ 0\le x\le 2\pi$

c) $\cos 2x-\sin 2x=1,\ 0\le x\le \pi$

5) Rita funktionskurvan samt ange alla lokala extrempunkter till

$$f(x)=\ln x+\arctan(1-x)\quad,\quad x>0.$$

6) Bestäm den största möjliga arean av en rätvinklig triangel med omkrets 2 längdenheter.

7) Visa att $f(x)=(\ln x)^x,\ \ x>1$ har en deriverbar invers f^{-1}.
Ange även f^{-1}:s definitionsmängd samt beräkna $(f^{-1})'(1)$.

Kortfattade lösningsförslag till tentamen
Analys i en variabel, del 1. TAIU10
2023-01-05.

1. $3x^4+6x^2-8x^3-2=0$
Antal reella lösningar.

Bilda $f(x)=3x^4+6x^2-8x^3-2$

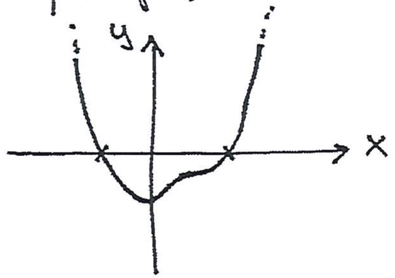
$$f'(x)=12x^3+12x-24x^2=12x(x^2-2x+1)=12x(x-1)^2=0$$

x		0		1	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	-1	$\nearrow \to \infty$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \underbrace{x^4}_{\to+\infty}\Big(3+\underbrace{\frac{6}{x^2}}_{\to 0}-\underbrace{\frac{8}{x}}_{\to 0}-\underbrace{\frac{2}{x^4}}_{\to 0}\Big)=\infty$$

f kontinuerlig. Allt detta tillsammans ger att $f=0$ precis 2 ggr.

f:s graf:



Svar: Ekv. har 2 st reella lösningar.

2 a. $$z=\frac{2(1+i)(1+i\sqrt{3})}{3i\cdot 2\cdot(\sqrt{3}-i)}$$

$$z=\frac{\cancel{2}\cdot\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\cdot\cancel{2}e^{i\frac{\pi}{3}}}{3e^{i\frac{\pi}{2}}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}}=\frac{\sqrt{2}}{3}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{3}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Svar: $z=\frac{\sqrt{2}}{3}e^{i\frac{\pi}{4}}$

b. $\bar{z}+(1+i)z=2+\frac{i}{2}$
$(z=a+ib, \quad \bar{z}=a-ib)$

$\Leftrightarrow a-ib+(1+i)(a+ib)=2+\frac{i}{2}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a-b=2 & (\text{Re}) \\ a=\frac{1}{2} & (\text{Im}) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=1/2 \\ b=-1 \end{cases}$

Svar: $z=\frac{1}{2}-i$

3. a. $$\lim_{x\to 3}\frac{\cancel{(x-3)}(x^2+2x+1)}{\cancel{(x-3)}(x+2)}=\frac{16}{5}$$

Svar: $\frac{16}{5}$

3b. $$\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-3x})(\sqrt{}+\sqrt{})}{(\sqrt{}+\sqrt{})}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-(x^2-3x)}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-3x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{5\cancel{x}}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\underbrace{\tfrac{2}{x}}_{\to 0}}+\sqrt{1-\underbrace{\tfrac{3}{x}}_{\to 0}}\right)}$$

$$=\frac{5}{2}.$$

Svar: $\underline{\frac{5}{2}}$.

3c. $$\lim_{x\to 0}\frac{4\cancel{x}}{3\underbrace{\frac{\sin 2x}{2x}}_{\to 1}}\cdot\frac{1}{2\cancel{x}}=\frac{2}{3}$$

Svar: $\underline{\frac{2}{3}}$

4a. $$-2(1-\sin^2 x)+\sin x+1=0$$

$$2\sin^2 x+\sin x-1=0$$

$$(t=\sin x)$$

$$2t^2+t-1=0$$

$$t^2+\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}=0$$

$$t=-\frac{1}{4}\pm\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{8}{16}}=-\frac{1}{4}\pm\frac{3}{4}=\begin{cases}\frac{1}{2}\\-1\end{cases}$$

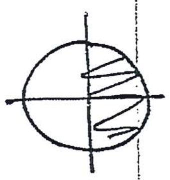
$$\sin x=\begin{cases}1/2\\-1\end{cases}\iff x=\frac{\pi}{6}+n\frac{2\pi}{3},\ n\in\mathbb{Z}$$

Svar: $\underline{x=\frac{\pi}{6}+n\frac{2\pi}{3}}$, $n\in\mathbb{Z}$.

4b. $\sin 2x=|\cos x|$, $0\le x\le 2\pi$.

fall 1. $0\le x\le\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}\le x\le 2\pi$.

$$2\sin x\cos x=\cos x$$



$\iff\begin{cases}\cos x=0\ \Rightarrow\ x_1=\frac{\pi}{2},\ x_2=\frac{3\pi}{2}\\ \text{eller}\\ \sin x=\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ x_3=\frac{\pi}{6}.\end{cases}$

fall 2. $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$

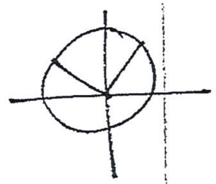
$$2\sin x\cos x=-\cos x$$

$$\sin x=-\frac{1}{2}\Rightarrow x_4=\frac{7\pi}{6}$$

Svar: $\underline{x_1=\frac{\pi}{2}}$, $\underline{x_2=\frac{3\pi}{2}}$, $\underline{x_3=\frac{\pi}{6}}$, $\underline{x_4=\frac{7\pi}{6}}$

4c. $\cos 2x-\sin 2x=1$, $0\le x\le\pi$.

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{=\sin\frac{\pi}{4}}\cos 2x-\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{=\cos\frac{\pi}{4}}\sin 2x=\frac{1}{\sqrt{2}}$$



$$\sin\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\iff\frac{\pi}{4}-2x=\begin{cases}\frac{\pi}{4}+n2\pi\\ \frac{3\pi}{4}+n2\pi\end{cases},\ n\in\mathbb{Z}.$$

$0\le x\le\pi$ ger

$$\iff x=\begin{cases}-n\pi\\-\frac{\pi}{4}-n\pi\end{cases}$$

Svar: $\begin{cases}\underline{x_1=0}\quad\underline{x_2=\pi}\\ \underline{x_3=\frac{3\pi}{4}}\end{cases}$

5. $f(x) = \ln x + \arctan(1-x) \quad , \quad x > 0$

$$f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{1+(1-x)^2}\cdot(-1) =$$

$$= \frac{x^2-2x+2-x}{x\,(\underbrace{1+(1-x)^2}_{>0})} = \frac{(x-1)(x-2)}{\underbrace{x}_{>0}(\underbrace{x^2-2x+2}_{>0})} = 0$$

$(x>0)$.

x	0		1		2	
$f'(x)$		+	0	−	0	+
$f(x)$		↗		↘		↗

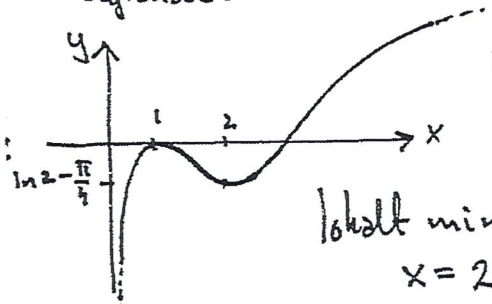
$f(1) = \ln 1 + \arctan 0 = 0$

$f(2) = \ln 2 + \arctan(-1) = \ln 2 - \frac{\pi}{4} < 0$.

$$\lim_{x\to 0^+} (\overset{\to -\infty}{\ln x} + \underset{\to \pi/4}{\arctan(1-x)}) = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} (\overset{\to\infty}{\ln x} + \underset{\text{begränsad.}}{\overset{\to -\pi/2}{\arctan(1-x)}}) = \infty$$

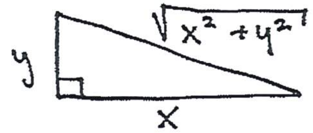
Svar:



lokalt max för $x=1$

lokalt min för $x=2$.

6.



$$x + y + \sqrt{x^2+y^2} = 2$$

$$\sqrt{x^2+y^2} = 2-(x+y)$$

$$\Rightarrow \cancel{x^2}+\cancel{y^2} = 4-4(x+y)+\cancel{x^2}+\cancel{y^2}+2xy$$

$$4y-2xy = 4-4x$$

$$y = \frac{4(1-x)}{2(2-x)} = \frac{2(1-x)}{(2-x)} \quad , \quad 0<x<1$$

$$\text{Arean} = \frac{xy}{2} = f(x) = \frac{x-x^2}{2-x} \quad , \quad 0<x<1.$$

Sök f_{max}.

$$f'(x) = \frac{(1-2x)(2-x)-(x-x^2)(-1)}{(2-x)^2} =$$

$$\frac{2x^2-5x+2-x^2+x}{(2-x)^2} = \frac{x^2-4x+2}{(2-x)^2} = 0$$

$$x = 2 \pm \sqrt{4-2} = 2-\sqrt{2}.$$

x	0		$2-\sqrt{2}$		1
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗		↘	

$x = 2-\sqrt{2}$ ger f_{max}.

Svar: $f_{max} = f(2-\sqrt{2}) = \frac{2-\sqrt{2}-(6-4\sqrt{2})}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{3-2\sqrt{2}}}$ a.e.

7. $f(x) = (\ln x)^x = e^{x\ln(\ln x)}, \quad x > 1$

$$f'(x) = \underbrace{(\ln x)^x}_{>0} \Big(\underbrace{\ln(\ln x) + \cancel{x} \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}}}_{>0} \Big) > 0$$

Se nedan. för $x > 1$.

Studera: $g(x) = \ln(\ln x) + \dfrac{1}{\ln x}, \quad x > 1.$

$$g'(x) = \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{(\ln x)^2} \cdot \frac{1}{x} =$$

$$\frac{1}{x}\left(\frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} \right) = 0 \Leftrightarrow x = e.$$

x	1		e	
$g'(x)$		$-$	0	$+$
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$

$g(e) = 1$

$\therefore$ $g(x) > 0$ för $x > 1$.

$f'(x) > 0$ för alla $x > 1$ $\Rightarrow$ f har en deriverbar invers.

$D_{f^{-1}} = V_f =]0, \infty[$

$$\lim_{x\to 1} e^{x\ln(\overset{\to 0}{\ln x})} = e^{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} (\ln x)^x = \infty \qquad D f^{-1}(1) = \frac{1}{f'(e)} = 1.$$

$1 = (\ln x)^x \Leftrightarrow x = e.$