Linköpings universitet
Magnus Berggren, MAI

Tentamen i Analys i en variabel del 1, utbildningskod TAIU10, modul TEN1. 2023-08-14 , kl 8.00 – 13.00

Penna,radergummi,linjal och passare får användas. Formelsamlingar och andra hjälpmedel är ej tillåtna. Lösningarna skall vara fullständiga,välmotiverade,ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Uppgifterna bedöms med 0 – 3 poäng. För betyg *n* (*n* = 3, 4 eller *5*) krävs minst 4(*n*-1) poäng. Godkänd dugga 1 och dugga 2 ger vardera 1 p. Observera att bonus enbart gäller för betyget 3. Skriv på omslaget hur många bonuspoäng (B=0,B=1 eller B=2) du har.

---

1. Rita kurvan $y = e^{3x-x^3}$, $x \in \mathbf{R}$. Ange lokala extrempunkter och asymptoter.

2. (a) Bestäm argumentet till $\dfrac{\sqrt{3}+i}{(1-i)^2}$.

   (b) Lös ekvationen $z^2 = 3 + 4i$

3. Lös följande ekvationer

   (a) $\cos^2 x = \dfrac{1}{2}$

   (b) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 1$

4. Bestäm följande gränsvärden

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{x^2-5x+6}{x^2-3x}$

   (b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} (\sqrt{4x^2+8x} - 2x)$

   (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{\tan x}$

5. En plåtlåda utan lock skall tillverkas av en kvadratisk plåt med sida 10 cm. Genom att klippa bort 4 kvadrater (en i varje hörn) kan sidorna bockas upp och bilda en låda. Bestäm dimensionerna på lådan så att volymen maximeras.

6. Bestäm konstanten k så att kurvan $y = \ln x - 2\ln(x+k)$ tangerar linjen $y = 1$.

7. Lös ekvationen $\arctan x + \arctan 2x = \dfrac{\pi}{3}$.

Kortfattade lösningsförslag till tentamen

Analys i en variabel del 1. TAIU10

2023-08-14 kl $8^{00} - 13^{00}$.

1. $y = e^{3x-x^3}$, $x \in \mathbb{R}$.

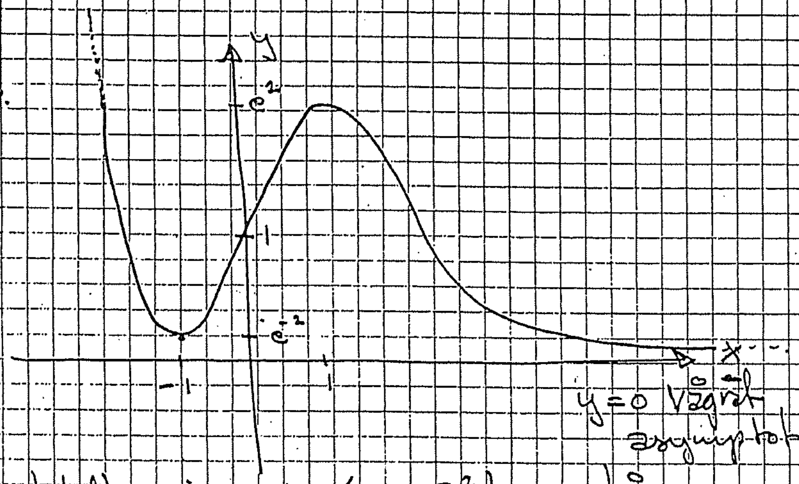
$$y' = (3-3x^2)e^{3x-x^3} = 3(1+x)(1-x)\underbrace{e^{3x-x^3}}_{>0}$$

x		-1		1	
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

$y(-1) = e^{-2}$ $\qquad$ $y \to 0$ då $x \to \infty$

$y(1) = e^{2}$ $\qquad$ $y \to \infty$ då $x \to -\infty$

Svar:



$y=0$ vågrät asymptot då $x \to \infty$.

lokalt min i $(-1, e^{-2})$

lokalt max i $(1, e^{2})$

2 a.
$$\frac{\sqrt{3}+i}{(1-i)^2} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{6}}}{\left(\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^2} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{6}}}{2e^{-i\pi/2}} = e^{i\left(\frac{\pi}{6}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)}$$
$$= e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

Svar: $\arg\left(\frac{\sqrt{3}+i}{(1-i)^2}\right) = \frac{2\pi}{3}$

b. $z^2 = 3+4i$ $\qquad$ $z = a+ib$

$(a+ib)^2 = 3+4i$

$a^2 - b^2 + 2iab = 3+4i$

Re: $a^2 - b^2 = 3$ ...(1) $\qquad$ (1) + (3) ger

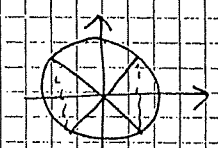
Im: $2ab = 4$ ...(2) $\qquad$ $2a^2 = 8$

Abs: $a^2 + b^2 = 5$ ...(3) $\qquad$ $a = \pm 2$

(2) ger $b = \pm 1$

Svar: $\begin{cases} z_1 = 2+i \\ z_2 = -2-i \end{cases}$

3. a. $\cos^2 x = \frac{1}{2}$



$\cos x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

Svar $x = \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}$.

3 b. $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 1$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x = \frac{1}{2}$$

Hjälpvinkelmetoden.

$$\cos\frac{\pi}{6}\sin x + \sin\frac{\pi}{6}\cos x = \frac{1}{2}$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad x + \frac{\pi}{6} = \begin{cases} \frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi \\ \frac{5\pi}{6} + n \cdot 2\pi \end{cases}$$

Svar: $x = \begin{cases} n \cdot 2\pi \\ \frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi \end{cases}$ där $n \in \mathbb{Z}$.

4 a.

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 3x} = \lim_{x \to 3} \frac{\cancel{(x-3)}(x-2)}{x\cancel{(x-3)}} =$$

$$= \frac{3-2}{3} = \frac{1}{3}$$

Svar: $\frac{1}{3}$

b.

$$\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{4x^2 + 8x} - 2x\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{4x^2 + 8x - 4x^2}{\sqrt{4x^2 + 8x} + 2x} =$$

förläng med konjugatet.

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{8x}{\sqrt{4x^2 + 8x} + 2x} = \lim_{x \to \infty} \frac{8}{\sqrt{4 + \frac{8}{x}} + 2} =$$

$$= \frac{8}{\sqrt{4} + 2} = 2$$

Svar: 2

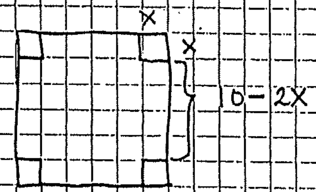
4 c.

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 1}{\tan x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 1}{\sin x} \cdot \cos x =$$

$$= \lim_{x \to 0} \underbrace{\frac{e^{2x} - 1}{2x}}_{\to 1} \cdot \frac{1}{\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1}} \cdot 2 \underbrace{\cos x}_{\to 1} = 2$$

Svar: 2.

5.



$$V(x) = (10 - 2x)^2 \cdot x, \quad 0 \leq x \leq 5$$

$$V'(x) = -4(10 - 2x)x + (10 - 2x)^2 =$$

$$= (10 - 2x)(10 - 6x) = 0$$

x	0		$10/6$		5
$V'(x)$		+	0	−	
$V(x)$		↗		↘	

V_{max} fås då $x = \frac{5}{3}$ cm.

Svar: $x = \frac{5}{3}$ cm.

$y = \ln x - 2\ln(x+k)$, $x > 0$

antag $k > 0$

$$y' = \frac{1}{x} - \frac{2}{x+k} = \frac{x+k-2x}{x(x+k)} =$$

$$= \frac{k-x}{x(x+k)} = 0$$

x	0		k	
y'		$+$	0	$-$
y		$\nearrow$		$\searrow$

$y \to -\infty$ då $x \to 0^+$

$y \to -\infty$ då $x \to \infty$.

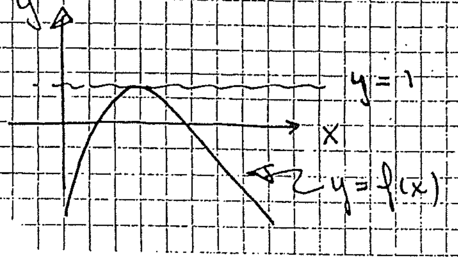
$$y = \ln\left(\frac{x}{(x+k)^2}\right)$$

tangerar linjen $y = 1$

$$y(k) = \ln\left(\frac{k}{(2k)^2}\right) = \ln\left(\frac{1}{4k}\right) = 1$$

$$\iff \frac{1}{4k} = e \iff k = \frac{1}{4e}$$

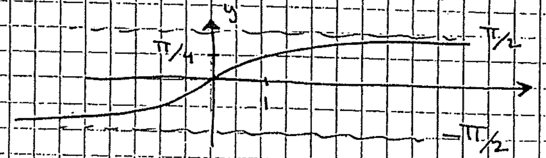
($k \le 0$ omöjligt)



Svar: $k = \frac{1}{4e}$

7. $\arctan x + \arctan 2x = \pi/3$

$\arctan x$ strängt växande. $V_f =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$



Ekv har precis en lösning, $0 < x < 1$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

$$\Longrightarrow \tan\frac{\pi}{3} = \frac{x+2x}{1-x\cdot 2x}$$

$$\sqrt{3} = \frac{x+2x}{1-2x^2}$$

$$\sqrt{3}(1-2x^2) = 3x$$

$$1-2x^2 = \sqrt{3}\,x$$

$$\Longrightarrow (1-2x^2)^2 = 3x^2$$

$$1 - 4x^2 + 4x^4 = 3x^2$$

$$4x^4 - 7x^2 + 1 = 0$$

$$x^4 - \frac{7}{4}x^2 + \frac{1}{4} = 0$$

$$x^2 = \frac{7}{8} \pm \sqrt{\frac{49}{64} - \frac{16}{64}}$$

$$x^2 = \frac{7}{8} \pm \frac{\sqrt{33}}{8}$$

forts.

$$x^2 = \frac{7 \pm \sqrt{33}}{8}$$

där $0 < x < 1$

$$x = \sqrt{\frac{7-\sqrt{33}}{8}} \underset{\text{förenkla}}{=} \frac{\sqrt{11}-\sqrt{3}}{4}$$

Svar: $x = \frac{\sqrt{11}-\sqrt{3}}{4}$