Linköpings universitet
Magnus Berggren, MAI

Tentamen i Analys i en variabel del 1, utbildningskod TAIU10, modul TEN1. 2023-10-27 , kl 8.00 – 13.00

Penna,radergummi,linjal och passare får användas. Formelsamlingar och andra hjälpmedel är ej tillåtna. Lösningarna skall vara fullständiga,välmotiverade,ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Uppgifterna bedöms med 0 – 3 poäng. För betyg n (n = 3, 4 eller 5) krävs minst 4(n-1) poäng. Godkänd dugga 1 och dugga 2 ger vardera 1 p. Observera att bonus enbart gäller för betyg 3.

---

1) Lös ekvationerna

a) $\cos(2x+\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}$ (1p) b) $\cos^2 x+4\sin x-4=0.$ (2p)

2) Beräkna följande gränsvärden

a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{x^2-3x+2}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}-x}{2x}$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{\sin(3x)}$

3) Bestäm största och minsta värde av $f(x)=e^{3x^2-2x^3}$, $-1\le x\le 2$

4) Rita grafen till funktionen $f(x)=\frac{x^2}{x^2+x-2}$. Ange lokala extrempunkter, största och minsta värde samt lodräta och vågräta asymptoter.

5) Lös ekvationen $z^3=-8i$. Rötterna skall ges på formen $x+iy$ där $x,y\in R$.

6) Bestäm konstanterna a och b så att funktionen

$$f(x)=\begin{cases}2x^2+x, & x\ge 0\\ ax+b, & x<0\end{cases}$$

blir deriverbar för alla x.

7) Hur många reella rötter har ekvationen $\arctan x+\frac{1}{x-1}=k$ för olika reella värden på konstanten k?

Kortfattade lösningsförslag till tentamen

TAIU10 del 1 2023-10-27

1 a. $\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2} \iff 2x+\pi/6=\begin{cases}\pi/3+n2\pi\\ -\pi/3+n2\pi\end{cases}$

$\iff$ Svar: $x=\begin{cases}\pi/12+n\pi\\ -\pi/4+n\pi\end{cases}, \quad n\in\mathbb{Z}$

b. $t=\sin x$ ger $1-t^2+4t-4=0$

$(-1\le t\le 1)$ $\iff \begin{cases}\cancel{t_1=3}>1\\ t_2=1\end{cases}$

Svar: $x=\frac{\pi}{2}+n2\pi$, $n\in\mathbb{Z}$

2 a. $\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x+3)}{\cancel{(x-1)}(x-2)}=\frac{4}{-1}=-4$

b. $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}-x}{2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x}}-x}{2x}=$

$=\lim \frac{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1\right)}{2\cancel{x}}=\frac{0}{2}=0$ (där $\frac{1}{x}\to 0$)

c. $\lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{\ln(1+x)}{x}}_{\to 1}\cdot\frac{1}{\underbrace{\frac{\sin 3x}{3x}}_{\to 1}}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$

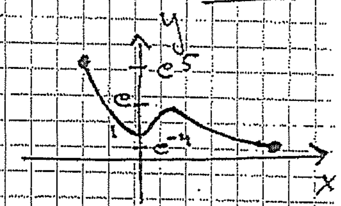
3. $f(x)=e^{3x^2-2x^3}$, $-1\le x\le 2$.

f kontinuerlig på kompakt mängd.

$\Rightarrow$ f_{max}, f_{min} existerar.

$f'(x)=6x(1-x)\underbrace{e^{3x^2-2x^3}}_{>0}$

Skiss.



$f'(x)=0 \Rightarrow \begin{cases}x_1=0\\ x_2=1\end{cases}$

Aspiranter.

$f(-1)=e^5$ $\quad f(0)=1$ $\quad f(1)=e$ $\quad f(2)=e^{-4}$

Globalt Max. $\qquad$ Globalt Min

Svar: $\begin{cases}f_{max}=e^5\\ f_{min}=e^{-4}\end{cases}$

4. $f(x)=\frac{x^2}{x^2+x-2}=1+\underbrace{\frac{-x+2}{x^2+x-2}}_{\to 0}$ då $x\to\pm\infty$.

$y=1$ asymptot då $x\to\pm\infty$.

$x\ne -2, 1$.

$f'(x)=\frac{2x(x^2+x-2)-x^2(2x+1)}{(x^2+x-2)^2}=\frac{x(x-4)}{(x^2+x-2)^2}$

x		-2		0		1		4	
$f'(x)$	$+$	$\nexists$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\nexists$	$\nearrow$		$\searrow$	$\nexists$	$\searrow$		$\nearrow$

Värdetabell. (inklusive gränsvärden).

x	y
$\to \pm\infty$	$\to 1$
$\to -2^-$	$\to \infty$
$\to -2^+$	$\to -\infty$
0	0
$\to 1^-$	$\to -\infty$
$\to 1^+$	$\to \infty$
4	$\frac{8}{9}$

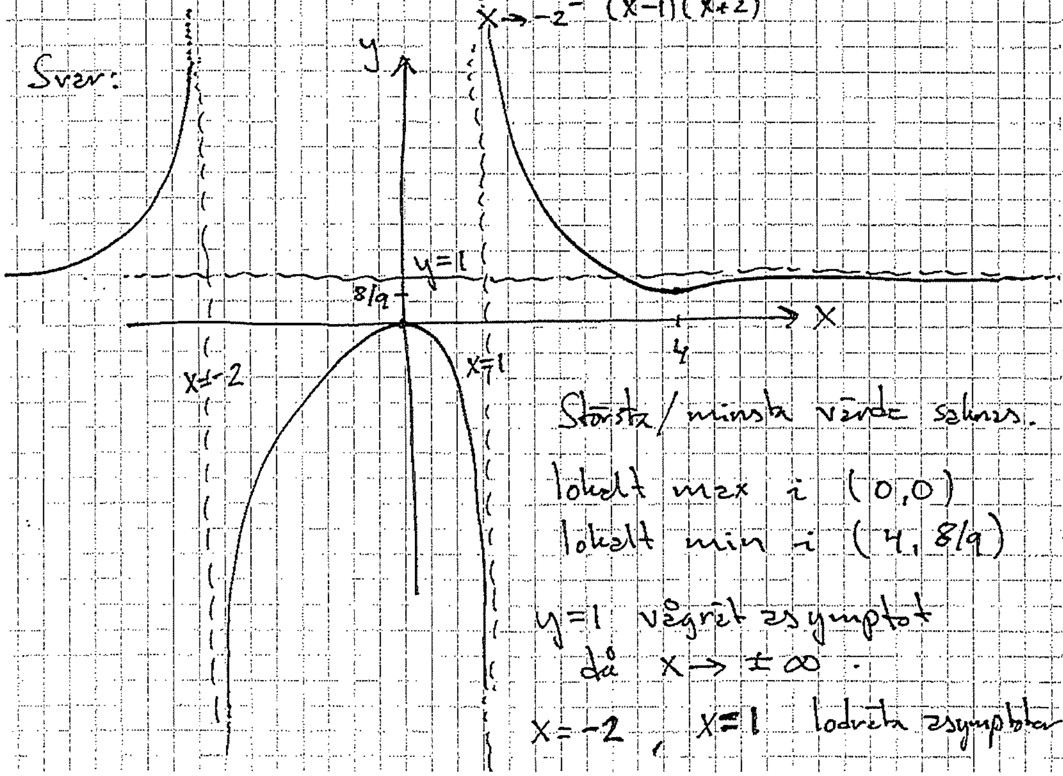
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2+x-2} =$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cancel{x^2}\cdot 1}{\cancel{x^2}(1+\underbrace{\tfrac{1}{x}}_{\to 0}-\underbrace{\tfrac{2}{x^2}}_{\to 0})} = 1$$

$$y = \frac{x^2}{(x-1)(x+2)}, \quad x \neq 1, \; x \neq -2.$$

$$\lim_{x\to -2^-} \frac{x^2}{(x-1)(x+2)} = \infty$$

Svar:



Största/minsta värde saknas.

lokalt max i $(0,0)$

lokalt min i $(4, 8/9)$

$y=1$ vågrät asymptot då $x \to \pm\infty$.

$x=-2$, $x=1$ lodräta asymptoter

5. Lös $z^3 = -8i$ Sätt $z = re^{i\theta}$

$$\iff (re^{i\theta})^3 = 8e^{i\frac{3\pi}{2}}$$

$$\iff \begin{cases} r^3 = 8 \\ 3\theta = \frac{3\pi}{2} + k2\pi \end{cases}, \quad k = 0, 1, 2$$

$$\iff \begin{cases} r = 2 \\ \theta = \frac{\pi}{2} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases}$$

$(k=0)$ $\quad z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2i$

$(k=1)$ $\quad z_2 = 2e^{i\frac{7\pi}{6}} = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} - i$

$(k=2)$ $\quad z_3 = 2e^{i\frac{11\pi}{6}} = 2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right) = \sqrt{3} - i$

$$\text{Svar: } \begin{cases} z_1 = 2i \\ z_2 = -\sqrt{3} - i \\ z_3 = \sqrt{3} - i \end{cases}$$

6. f skall vara kontinuerlig och $\frac{d}{dx}(2x^2+x)$ och $\frac{d}{dx}(ax+b)$ skall sammanfalla för $x=0$.

f kontinuerlig för $x=0$

$\Longleftrightarrow$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = b = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 0$$

$b=0$

$$\frac{d}{dx}(2x^2+x) = 4x+1$$

$$\frac{d}{dx}(ax+b) = a$$

$$f'_-(0) = a = f'_+(0) = 1$$

$a=1$

Svar: $\begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases}$

7. Bilda $f(x) = \arctan x + \frac{1}{x-1}$, $x \neq 1$.

$g(x) = k$ (vågrät linje).

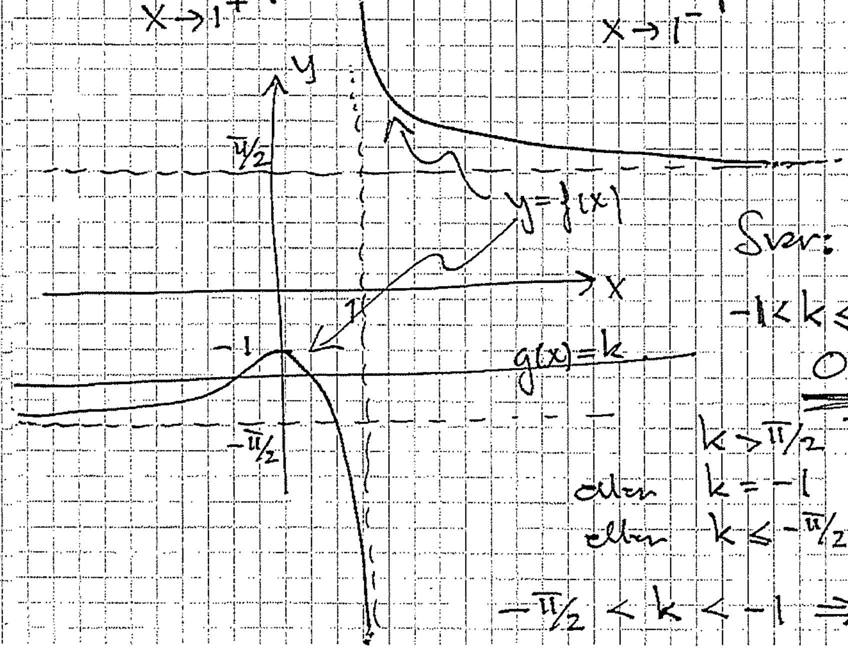
Hur många gånger skär f och g varandra?

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{-2x}{(1+x^2)(x-1)^2}$$

x		0		1	
$f'(x)$	+	0	−	∄	−
$f(x)$	↗	−1	↘		↘

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \pi/2$ $\quad$ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\pi/2$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$ $\quad$ $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$.



Svar:

$-1 < k \leq \pi/2 \Rightarrow$ 0 rötter.

$\left.\begin{array}{l} k > \pi/2 \\ \text{eller } k = -1 \\ \text{eller } k \leq -\pi/2 \end{array}\right\} \Rightarrow$ 1 rot.

$-\pi/2 < k < -1 \Rightarrow$ 2 rötter.