Linköpings universitet
Magnus Berggren, MAI

Tentamen i Analys i en variabel del 1, utbildningskod TAIU10, modul TEN1. 2024-01-04 , kl 8.00 – 13.00

Penna,radergummi,linjal och passare får användas. Formelsamlingar och andra hjälpmedel är ej tillåtna. Lösningarna skall vara fullständiga,välmotiverade,ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Uppgifterna bedöms med 0 – 3 poäng. För betyg n (n = 3, 4 eller 5) krävs minst 4(n-1) poäng. Godkänd dugga 1 och dugga 2 ger vardera 1 p. Observera att bonus enbart gäller för betyg 3.

1) Rita grafen till funktionen $f(x) = x^4 e^{-x}$.
Ange lokala extrempunkter samt ev. asymptoter. Bestäm ev. största resp. minsta värde ?

2) Beräkna följande gränsvärden

a) $\lim\limits_{x\to\infty} (\ln(x^2+1) - 2\ln(x+2))$ b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-2x+1}{x^3+2x-3}$ c) $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{\sin 2x}{x}}$

3) Lös ekvationerna a) $\sin 3x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\ln(x+1) + \ln(x-1) = \ln(x+5)$

c) $\sin(4x + \dfrac{\pi}{3}) = \sin 2x$

4) a) Finn alla komplexa lösningar till ekvationen $(z-i)^3 + 8i = 0$.
ledning: sätt $w = z - i$ (2p)

b) Bestäm ett argument för $z = \dfrac{(1+i)(1+i\sqrt{3})}{3i(\sqrt{3}-i)}$. (1p)

5) Basytan i en låda, som har formen av ett rätblock, är en kvadrat.
Omkretsen av en sidoyta i lådan är 12 dm. Beräkna maximivärdet av lådans volym.

6) Antag att funktionen $f(x) = \dfrac{x^2}{4} - \ln x, x > 0$ är given.
Ange största möjliga intervall $]0, a]$ där f har en invers $g = f^{-1}$. Ange D_g och V_g.
Beräkna $g'(\dfrac{1}{4})$.

7) a) Antag att $f(x) = \dfrac{\sin x^2}{x}$ för $x \neq 0$.
Undersök om man kan definiera $f(0)$ så att f blir kontinuerlig i $x = 0$. (1p)

b) Antag att $f(x) = x \arctan \dfrac{1}{x}$ för $x \neq 0$ och att $f(0) = 0$.
Undersök om $f'(0)$ existerar. (2p)

Kortfattade lösningsförslag

1. $f(x) = x^4 e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}$.

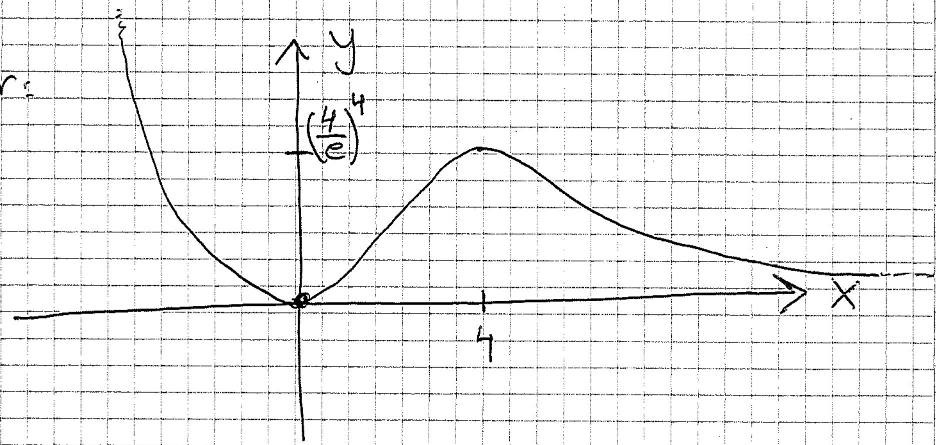
$$f'(x) = 4x^3 e^{-x} + x^4 e^{-x}(-1) = x^3 \underbrace{e^{-x}}_{>0}(4-x)$$

x		0		4	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

x	y
0	0
4	$\left(\frac{4}{e}\right)^4$
$\to\infty$	$\to 0$
$\to-\infty$	$\to\infty$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^4}{e^x} = 0$$ enligt standardgr.v.

Svar:



$y=0$ asymptot då $x \to \infty$.

lokalt (globalt) min i $x=0$

lokalt max i $x=4$.

Största värde saknas

Minsta värde $= 0$

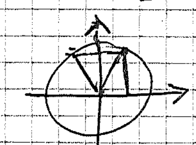
2. a. $$\ln(x^2+1) - \ln(x+2)^2 = \ln\frac{x^2+1}{x^2+4x+4} = \ln\frac{\cancel{x^2}(1+\underbrace{\tfrac{1}{x^2}}_{\to 0})}{\cancel{x^2}(1+\underbrace{\tfrac{4}{x}}_{\to 0}+\underbrace{\tfrac{4}{x^2}}_{\to 0})} \to \ln 1 = 0$$ då $x \to \infty$

b. $$\frac{x^2-2x+1}{x^3+2x-3} = \frac{(x-1)^{\cancel{2}}}{\cancel{(x-1)}(x^2+x+3)} \to \frac{0}{5} = 0$$ då $x \to 1$

c. $$\lim_{x\to 0} e^{\frac{\sin 2x}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\underbrace{\frac{\sin 2x}{2x}}_{\to 1}\cdot 2} = e^2$$

enligt standard.gr.v. $\frac{\sin t}{t} \to 1$ då $t \to 0$

3 a. $$\sin 3x = \frac{\sqrt{3}}{2} \iff 3x = \begin{cases} \pi/3 + n2\pi \\ \pi - \pi/3 + n2\pi \end{cases}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$



$$\iff x = \begin{cases} \pi/9 + \frac{n2\pi}{3} \\ \frac{2\pi}{9} + \frac{n2\pi}{3} \end{cases}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$
Svar.

b. $\ln(x+1) + \ln(x-1) = \ln(x+5), \quad x > 1$

$\iff \ln(x^2-1) = \ln(x+5)$

$(x>1) \iff x^2 - 1 = x + 5$

$\iff x^2 - x - 6 = 0 \iff x_1 = -2$ (falsk), $\boxed{x_2 = 3}$

Svar: $\boxed{x_2 = 3}$

3c. $\sin(4x+\frac{\pi}{3}) = \sin 2x$

$$\iff 4x+\frac{\pi}{3} = \begin{cases} 2x + n2\pi \\ \pi - 2x + n2\pi \end{cases}$$

$$\iff x = \begin{cases} -\frac{\pi}{6} + \frac{n2\pi}{3} \\ \frac{\pi}{9}+\frac{n\pi}{3}, \quad n\in\mathbb{Z}. \end{cases}$$

4a. $w^3 = -8i$ Sub. $w = re^{i\theta}$

$$\iff (re^{i\theta})^3 = 8e^{i(\frac{3\pi}{2}+k2\pi)}, \quad k\in\mathbb{Z}.$$

$$\iff \begin{cases} r^3=8 \\ 3\theta = \frac{3\pi}{2}+k2\pi \end{cases} \quad \binom{r>0}{r\in\mathbb{R}} \iff \begin{cases} r=2 \\ \theta = \frac{\pi}{2}+\frac{k2\pi}{3} \end{cases}$$

$k=0$

$w_1 = 2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2i$

$k=1$

$w_2 = 2e^{i\frac{7\pi}{6}} = 2(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}) = -\sqrt{3}-i$

$w_3 = 2e^{i\frac{11\pi}{6}} = 2(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}) = \sqrt{3}-i$

$z = w+i$

Svar: $z_1 = 3i$

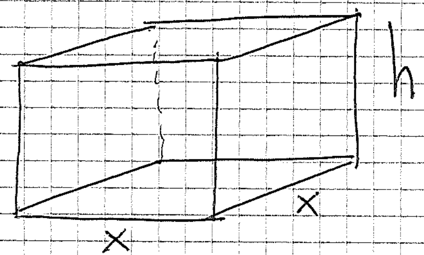
$z_{2,3} = \pm\sqrt{3}$

4b. $$z = \frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\cancel{2}e^{i\frac{\pi}{3}}}{3e^{i\frac{\pi}{2}}\cancel{2}e^{i(-\frac{\pi}{6})}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3}e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}-(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}))} = \frac{\sqrt{2}}{3}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Svar: $\arg z = \frac{\pi}{4}$

5.



$2x+2h=12$

$h = 6-x$

$V = x^2h$

$V(x) = x^2(6-x) = 6x^2-x^3, \quad 0\le x\le 6.$

$V'(x) = 12x-3x^2 = 3x(4-x) = 0$?

$x=4.$

x		4	
$V'(x)$	+	0	−
$V(x)$	↗		↘

$V_{max} = V(4) = 32$

Svar: 32 liter.

6. $f(x) = \frac{x^2}{4} - \ln x \ , \ x > 0$

$f'(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{x} = \frac{x^2-2}{2x} = \frac{(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})}{2x}$

x	0		$\sqrt{2}$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$

ger att $a=\sqrt{2}$.

$f(\sqrt{2}) = \frac{(\sqrt{2})^2}{4} - \ln 2^{1/2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$

Svar: $D_g = V_f = \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2 \ , \ \infty\right[$

$V_g = D_f = \left]0, \sqrt{2}\right]$

$g'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2$

$y = 1/4$ ger $x = 1$.

7. a. f kont i $x=0$

$\Longleftrightarrow$

$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$

så $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2}{x} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\sin x^2}{x^2}}_{\to 1} \underbrace{x}_{\to 0} = 0$

Svar: Ja. $f(0) = 0$.

b. $f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} =$

$= \lim_{x\to 0} \frac{x \arctan\frac{1}{x} - 0}{x-0} =$

$= \lim_{x\to 0} \arctan\frac{1}{x} =$ exist ej.

Ty $\lim_{x\to 0^+} \arctan\underbrace{\left(\frac{1}{x}\right)}_{\to +\infty} = \pi/2 \neq$

$\lim_{x\to 0^-} \arctan\underbrace{\left(\frac{1}{x}\right)}_{\to -\infty} = -\pi/2$.

Svar: $f'(0)$ exist ej.