Linköpings universitet
Magnus Berggren, MAI

Tentamen i Analys i en variabel del 1, utbildningskod TAIU10, modul TEN1. 2024-08-19 , kl 8.00 – 13.00

Penna,radergummi,linjal och passare får användas. Formelsamlingar och andra hjälpmedel är ej tillåtna. Lösningarna skall vara fullständiga,välmotiverade,ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Uppgifterna bedöms med 0 – 3 poäng. För betyg n (n = 3, 4 eller 5) krävs minst 4(n-1) poäng. Godkänd dugga 1 och dugga 2 ger vardera 1p. Observera att bonus enbart gäller för betyget 3.

---

1) Rita grafen till funktionen $f(x)=\ln(x+1)-\ln x-\dfrac{2}{x+1}$, $x>0$. Eventuella asymptoter och stationära punkter ska framgå i figuren.

2) Lös ekvationen $z^3=(1+i)^6$. Svara på formen $a+ib$.

3) Beräkna följande gränsvärden

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x^2+x-2}{x^2+x-6}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(xe^{2x})}{x+\sin 2x}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+9x}-x)$

4) Lös följande ekvationer

a) $\sin(2x+\dfrac{\pi}{2})=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\sin 3x=\sin 2x$ c) $\arccos x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

5) Hur många skilda reella rötter har ekvationen

$$\ln(1+x)=\arctan x \quad ?$$

6) a) Definiera vad som menas med att f är kontinuerlig i punkten a. (1p)

b) Låt $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{2x}-1}{\sin 3x} & , \ x\neq 0\\ A & , \ x=0\end{cases}$

Bestäm A så att $f(x)$ blir kontinuerlig för $x=0$. (2p)

7) Betrakta kurvan $y=e^{-2x^2}$. Var kan en tangent till kurvan skära y-axeln ?

Korrigerade lösningsförslag till tentamen

Analys i en variabel del I TAIU 10.

2024-08-19

1. $f(x) = \ln(x+1) - \ln x - \frac{2}{x+1}$, $x > 0$

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{2}{(x+1)^2} = \frac{x-1}{x(x+1)^2}$$

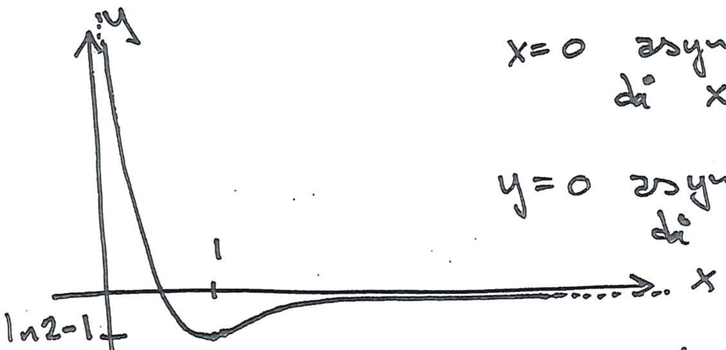
x	0		1	
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$

f kont. för $x>0$.

$f(1) = \ln 2 - 1 < 0$

$f \to \infty$ då $x \to 0^+$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\ln\left(\underbrace{\frac{x+1}{x}}_{\to 1}\right) - \underbrace{\frac{2}{x+1}}_{\to 0}\right) = \ln 1 = 0$$



$x=0$ asymptot då $x \to 0^+$.

$y=0$ asymptot då $x \to \infty$.

Globalt min i $(1, \ln 2 - 1)$.

2. $z^3 = (1+i)^6$

$(1+i)^2 = (1+i)(1+i) = 1+2i-1 = 2i$

$(1+i)^6 = (2i)^3 = -8i$

Lös $z^3 = -8i$ **Binomisk ekv.**

Sätt $z = re^{i\theta}$

$r^3 e^{i3\theta} = 8e^{i\frac{3\pi}{2}}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r^3 = 8 \\ 3\theta = \frac{3\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 2 \\ \theta = \frac{\pi}{2} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases}$$

$k = 0, 1, 2$.

$z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{2}} = \underline{2i}$

$z_2 = 2e^{i\frac{7\pi}{6}} = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)$

$= \underline{\underline{-\sqrt{3} - i}}$

$z_3 = 2e^{i\frac{11\pi}{6}} = \underline{\underline{\sqrt{3} - i}}$

Svar: $\begin{cases} z_1 = 2i \\ z_2 = -\sqrt{3} - i \\ z_3 = \sqrt{3} - i \end{cases}$

3. a. $\lim_{x\to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x^2+1)}{\cancel{(x-2)}(x+3)} = \frac{5}{5} = \underline{1}$

b. $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x+\ln e^{2x}}{x+\sin 2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x}\left(\underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{\to 0}+2\right)}{\cancel{x}\left(1+\underbrace{\frac{\sin 2x}{x}}_{\to 0}\right)} =$

$= \frac{2}{1} = \underline{2}$

c. $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+9x}-x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^2}+9x-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+9x}+x} =$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{9\cancel{x}}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\underbrace{\frac{9}{x}}_{\to 0}}+1\right)} = \underline{\frac{9}{2}}$

4 a. $\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow \quad 2x+\frac{\pi}{2} = \begin{cases} \frac{\pi}{3}+n2\pi \\ \frac{2\pi}{3}+n2\pi \end{cases}, \quad n\in\mathbb{Z}.$

$\Leftrightarrow \quad 2x = \begin{cases} -\frac{\pi}{6}+n2\pi \\ \frac{\pi}{6}+n2\pi \end{cases}$

$\Leftrightarrow \quad x = \begin{cases} -\frac{\pi}{12}+n\pi \\ \frac{\pi}{12}+n\pi \end{cases}.$

b. $\sin 3x = \sin 2x \Leftrightarrow 3x = \begin{cases} 2x + n2\pi \\ \pi-2x+n2\pi \end{cases}$

$\Leftrightarrow \quad x = \begin{cases} n2\pi \\ \frac{\pi}{5}+\frac{n2\pi}{5} \end{cases}, \quad n\in\mathbb{Z}.$

c. $\arccos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Svar: lösning saknas..

motivering: $f(x) = \arccos x$

$V_f = [0, \pi]$

$-\frac{\sqrt{3}}{2} \notin V_f.$

5. Bilda $f(x) = \ln(1+x) - \arctan x$ och bestäm antalet reella nollställen

$f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{1+x^2-(1+x)}{(1+x)(1+x^2)} =$

$= \frac{x(x-1)}{(1+x)(1+x^2)}, \quad x > -1.$

x	-1		0		1	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$f(0) = 0$

$f\to\infty$ då $x\to\infty$

f kont.

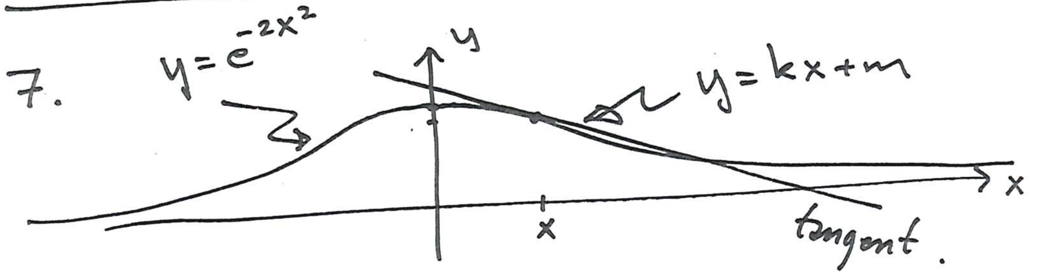
$\Rightarrow$ Svar: Exakt 2 skilda reella

6 a. f kont. för $x = a \iff \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

b. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} - 1}{\sin 3x} = \lim\limits_{x \to 0} \underbrace{\dfrac{e^{2x}-1}{2x}}_{\to 1} \cdot \dfrac{1}{\underbrace{\dfrac{\sin 3x}{3x}}_{\to 1}} \cdot \dfrac{2}{3} =$

$= \dfrac{2}{3}$ Svar: $\underline{A = \dfrac{2}{3}}$.

7.



$y' = -4xe^{-2x^2}$ vilket utgör k-värdet.

$m = e^{-2x^2} - (-4xe^{-2x^2})\,x$

$m(x) = (1 + 4x^2)\,e^{-2x^2}$. Bestäm V_m.

$m'(x) = 8x\,e^{-2x^2} + (1 + 4x^2)(-4x)\,e^{-2x^2} =$

$= e^{-2x^2} \cdot 4x\,(2 - 1 - 4x^2) = 4xe^{-2x^2}(1 - 4x^2)$

$m'(x) = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_{2,3} = \pm \frac{1}{2} \end{array}$.

Räcker att studera $x \geq 0$ (symmetri)

x	0		$1/2$	
$m'(x)$	0	$+$	0	$-$
$m(x)$		$\nearrow$		$\rightarrow$

$m(0) = 1$

$m(1/2) = 2\,e^{-1/2} = \dfrac{2}{\sqrt{e}} > 1$

$m \to 0$ då $x \to \infty$.

Svar: $\underline{0 < m \leq \dfrac{2}{\sqrt{e}}}$.