Linköpings universitet
Magnus Berggren, MAI

Tentamen i Analys i en variabel del 1, utbildningskod TAIU10, modul TEN1. 2024-10-31 , kl 8.00 – 13.00

Penna,radergummi,linjal och passare får användas. Formelsamlingar och andra hjälpmedel är ej tillåtna. Lösningarna skall vara fullständiga,välmotiverade,ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Uppgifterna bedöms med 0 – 3 poäng. För betyg n (n = 3, 4 eller 5) krävs minst 4(n-1) poäng. Godkänd dugga 1 och dugga 2 ger vardera 1 p. Observera att bonus enbart gäller för betyg 3.

---

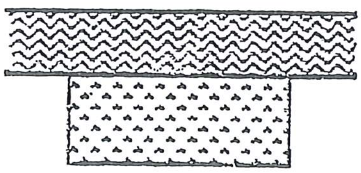
1) Rita grafen till funktionen $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-3x}$. Eventuella asymptoter och stationära punkter ska framgå i figuren.

2) a) Beräkna $(1+i\sqrt{3})^{100}$. (1p)

b) Visa att man kan bestämma konstanten a så att polynomet $P(z)=z^4+2z^3+3z^2+az+2$ är delbart med z^2+2z+2 .
Bestäm därefter alla nollställen till $P(z)$ för detta värde på a. (2p)

3)

En bonde vill sätta ett 100 m långt staket kring en hage intill en flod så att hagen blir rektangulär och får största möjliga area. Det behövs inget staket längs floden. (Se figur!) Hur långa blir hagens sidor ?



4) Beräkna följande gränsvärden

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3+2x-3}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(e^{4x}+e^{5x})}{x}$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 3x}-1}{x}$

5) Bestäm största och minsta värdet av $f(x)=x+\sin 2x$, $0\le x\le\dfrac{\pi}{2}$.

6) Rita kurvan $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$ genom att först skriva om högerledet i formen $A\sin(x+v)$ med konstanter $A>0$ och v.
Bestäm sedan alla reella lösningar x till $\sin x+\sqrt{3}\cos x=1$.

7) Tangenten till kurvan $y=e^{-x}$, $x\ge 0$, bildar tillsammans med koordinataxlarna en triangel. Bestäm största möjliga area av denna triangel.

Kortfattade lösningar till tentamen
Analys i en variabel del 1. 2024-10-31

1. $$f(x) = \frac{x+1}{x^2-3x} = \frac{x+1}{x(x-3)}, \quad x \neq 0, 3$$

$$f'(x) = /\text{kvotregeln ... osv}/ = \frac{(1-x)(x+3)}{(x^2-3x)^2}$$

x		-3		0		1		3	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$-$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$	$\nexists$	$\nearrow$		$\searrow$	$\nexists$	$\searrow$

Värdetabell $\quad y = \dfrac{x+1}{x^2-3x} = \dfrac{x+1}{x(x-3)}$

x	y
-3	$-1/9$
$\to 0^-$	$\to \infty$
$\to 0^+$	$\to -\infty$
1	-1
$\to 3^-$	$\to -\infty$
$\to 3^+$	$\to \infty$
$\to \pm\infty$	$\to 0$

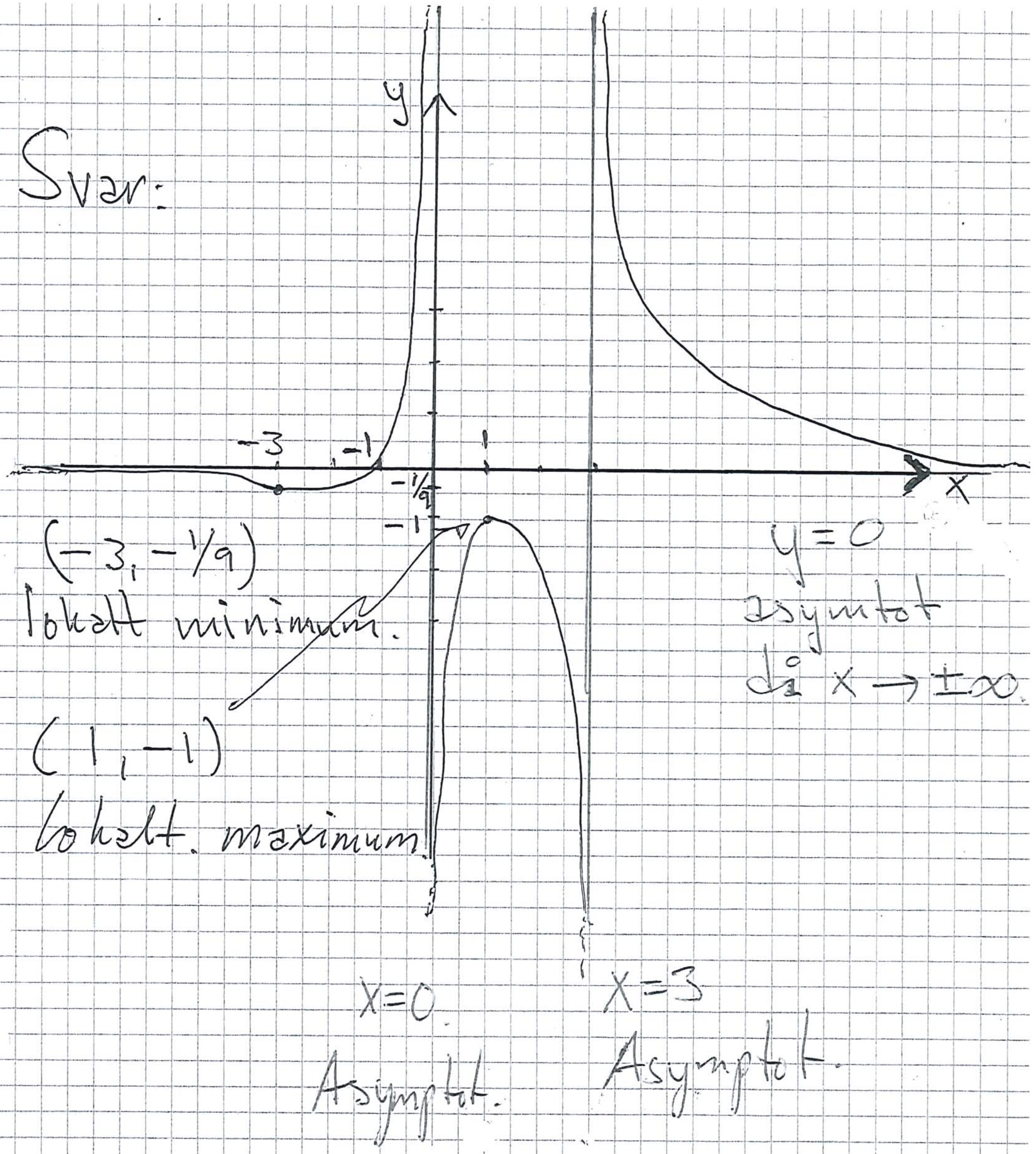
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x+1}{x^2-3x} = \Big/\begin{matrix}\text{Dominerande} \\ \text{Bryt ut}\end{matrix}\Big/$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x(1+\frac{1}{x})}{x^2(1-\underbrace{\tfrac{3}{x}}_{\to 0})} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0} \cdot \frac{1+\frac{1}{x}}{1-\underbrace{\frac{3}{x}}_{\to 0}} =$$

$$= 0 \cdot 1 = 0$$

Svar:



2 a.

$$(1+i\sqrt{3})^{100} = \left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{100} =$$

$$= 2^{100} e^{i\frac{100\pi}{3}} = \Big/ \ \frac{100\pi}{3} = 16\cdot\underbrace{\frac{6\pi}{3}}_{1\ \text{varv}} + \frac{4\pi}{3} \ \Big/ =$$

$$= 2^{100} e^{i\frac{4\pi}{3}} = 2^{100}\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) =$$

$$= 2^{100}\left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = \underline{-2^{99}(1+i\sqrt{3})}$$

Svar:

2 b.

$$\begin{array}{l|l} & z^2+1 \\ \hline z^4+2z^3+3z^2+az+2 & z^2+2z+2 \\ -(z^4+2z^3+2z^2) & \\ \hline \quad z^2+az+2 & \\ -(z^2+2z+2) & \\ \hline \quad (a-2)z & \end{array}$$

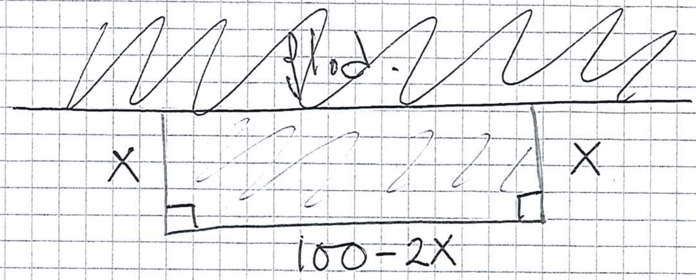
resten $=0 \iff a=2$.

$$P(z) = (z^2+1)\underbrace{(z^2+2z+2)}_{=(z+1)^2+1}$$

Ser att nollställena blir $\pm i$, $-1\pm i$

Svar: $a=2$. 4 st nollställen $\pm i$ samt $-1\pm i$

3.



$$A(x) = x(100-2x) = -2x^2+100x$$

$$D_A = [0, 50]$$

$$A'(x) = -4x+100$$

$$A'(x) = 0 \implies x = 25.$$

x		25	
$A'(x)$	+	0	−
$A(x)$	↗		↘

$x=25$ ger A_{max}.

Svar: Hagens sidor blir 25 m resp. 50 m.

4 a.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-2x+1}{x^3+2x-3} \quad \text{typ}\left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\frac{x^2-2x+1}{x^3+2x-3} = \frac{\cancel{(x-1)}(x-1)}{\cancel{(x-1)}(x^2+x+3)} \to \frac{0}{5} = 0$$

Faktorsatsen.

då $x \to 1$.

Svar: Gr.v = 0

4b.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln(e^{4x}+e^{5x})}{x} \quad \text{typ}\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

$$\frac{\ln(e^{4x}+e^{5x})}{x} = \frac{\ln(e^{5x}(e^{-x}+1))}{x} =$$

Dominant? Bryt ut.

$$= \frac{\ln e^{5x} + \ln(e^{-x}+1)}{x} = \frac{5x + \ln(e^{-x}+1)}{x} =$$

$$= 5 + \frac{\ln(\overbrace{e^{-x}}^{\to 0}+1)}{\underbrace{x}_{\to \infty}} \to 5 + 0 = 5$$

då $x \to \infty$

$\ln 1 = 0 \qquad \left/ \frac{0}{\infty} = 0 \right/$

Svar: Gr.v = 5.

4 c.

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{\sin 3x}-1}{x} \quad \text{typ}\left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\frac{e^{\sin 3x}-1}{x} = \underbrace{\frac{e^{\sin 3x}-1}{\sin 3x}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{\sin 3x}{3x}}_{\to 1} \cdot 3 \to 3$$

då $x \to 0$.

enligt standardgr.v.

$$\boxed{\lim_{t \to 0} \frac{e^t-1}{t} = 1}$$

$$\boxed{\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1}$$

Svar: Gr.v = 3

5.

$f(x) = x + \sin 2x \quad , \; 0 \leq x \leq \pi/2$

f kontinuerlig på slutet och begränsat intervall.

Största resp. minsta värde existerar. (enligt sats).

Tänk grafritning.

forts

nr 5. $f'(x) = 1 + 2\cos 2x = 0$?

$$\cos 2x = -\frac{1}{2} \iff 2x = \pm\frac{2\pi}{3} + n2\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\iff x = \pm\frac{\pi}{3} + n\pi.$$

$x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ ger $x = \frac{\pi}{3}$

x	0		$\pi/3$		$\pi/2$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Största värde då $x = \pi/3$.

Minsta värde? Jämför $f(0)$ med $f(\pi/2)$.

$f(0) = 0$

$f(\pi/2) = \frac{\pi}{2} + \underbrace{\sin \pi}_{=0} = \pi/2$.

$f(\pi/3) = \frac{\pi}{3} + \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$

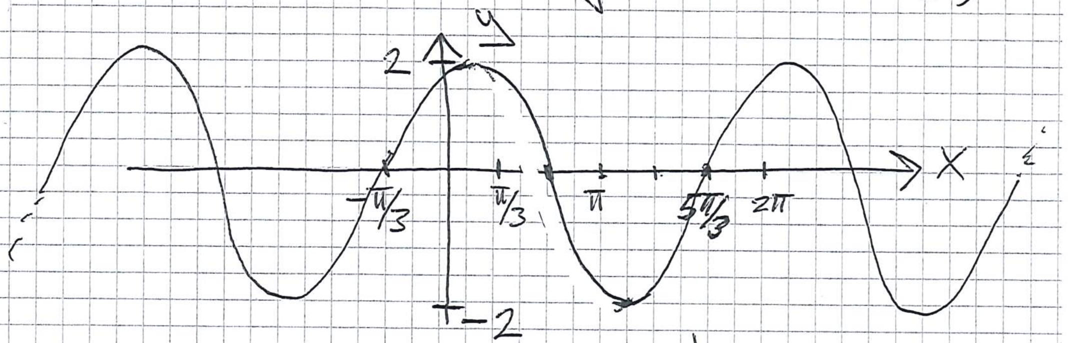
Svar: Största värde $= \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$, Minsta värde $= 0$

6. $y = \sin x + \sqrt{3}\cos x = \left| \begin{array}{l} A = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} \\ A = 2 \end{array} \right|$

$$= 2\Big(\underbrace{\tfrac{1}{2}}_{=\cos v}\sin x + \underbrace{\tfrac{\sqrt{3}}{2}}_{=\sin v}\cos x\Big) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

t.ex $v = \frac{\pi}{3}$

Rita kurvan $y = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

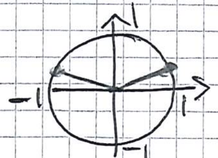


perioden $= 2\pi$.

Amplitud $= 2$

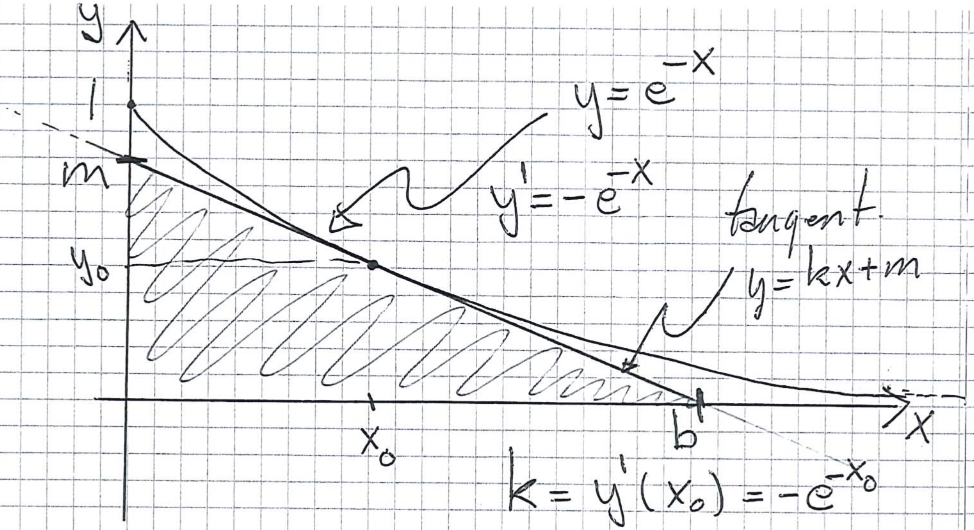
Lös $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1 \iff \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

$$\iff x + \frac{\pi}{3} = \begin{cases} \pi/6 + n2\pi \\ 5\pi/6 + n2\pi \end{cases}, \quad n \in \mathbb{Z} \iff$$



$$x = \begin{cases} -\pi/6 + n2\pi \\ \frac{\pi}{2} + n2\pi. \end{cases}$$

7.



$k = y'(x_0) = -e^{-x_0}$

$y_0 = y(x_0) = e^{-x_0}$

Punkten (x_0, y_0) tillhör tangenten vilket ger $e^{-x_0} = -e^{-x_0} \cdot x_0 + m$

$m = (1+x_0)e^{-x_0}$ = triangelns höjd.

$-\dfrac{m}{b} = -e^{-x_0}$ (lutningen). $\iff$ $b = \dfrac{(1+x_0)e^{-x_0}}{e^{-x_0}} = 1+x_0$

Triangelns area $= \dfrac{bm}{2} = \dfrac{(1+x_0)^2 e^{-x_0}}{2}$

$$A(x_0) = \frac{1}{2}(1+x_0)^2 e^{-x_0}$$

Maximera $A(x_0)$.

$$A'(x_0) = \frac{1}{2}\left(2(1+x_0)e^{-x_0} - e^{-x_0}(1+x_0)^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(1+x_0)e^{-x_0}\left(2-(1+x_0)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{(1+x_0)}_{>0}\underbrace{e^{-x_0}}_{>0}(1-x_0) = 0\ ?$$

$x_0 = 1$.

x_0	0		1	
$A'(x_0)$		+	0	−
$A(x_0)$		↗		↘

$$A_{max} = A(1) = \frac{1}{2}(1+1)^2 e^{-1} = \frac{2}{e}$$

Svar: $A_{max} = \dfrac{2}{e}$ a.e.