Linköpings universitet
Magnus Berggren, MAI

Tentamen i Analys i en variabel del 1, utbildningskod TAIU10, modul TEN1. 2025-01-09 , kl 8.00 – 13.00

Penna,radergummi,linjal och passare får användas. Formelsamlingar och andra hjälpmedel är ej tillåtna. Lösningarna skall vara fullständiga,välmotiverade,ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Uppgifterna bedöms med 0 – 3 poäng. För betyg n (n = 3, 4 eller 5) krävs minst 4(n-1) poäng. Godkänd dugga 1 och dugga 2 ger vardera 1 p. Observera att bonus enbart gäller för betyg 3.

---

1) Rita grafen till funktionen $f(x) = x^3e^{-x}$. Ange eventuella lokala extrempunkter, största och minsta värde samt lodräta och vågräta asymptoter.

2) a) Beräkna z^6 om $z = \dfrac{(1+i)(\sqrt{3}+i)}{(-\sqrt{12}+2i)}$. Svaret skall ges på formen $x+iy$. (2p)

b) Bestäm konstanten a så att polynomet $p(x) = x^4 + ax + 4$ är delbart med $x^2 - 2x + 2$.

3) Lös följande ekvationer

a) $2\cos^2 x - \sin x = 1$ (2p) b) $\arctan x = -\dfrac{\pi}{3}$

4) Beräkna följande gränsvärden

a) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2+2x}{x^2-4}$ b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{e^{2(x-1)}-1}$ c) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln\sqrt{x+1}}{\ln x^5}$

5) Hur många reella rötter har ekvationen $2x + 3\ln x = 10\arctan x$ för $x > 0$?

6) Antag att funktionen $f(x) = \dfrac{x^2}{4} - \ln x,\ x > 0$ är given. Ange största möjliga intervall $]0,a]$ där f har en invers $g = f^{-1}$. Ange D_g och V_g. Beräkna $g'(\frac{1}{4})$.

7) Betrakta polynomet $p(z) = z^4 + z^2 + 3z + 1$.
Hur många nollställen (reella såväl som komplexa) ligger i cirkeln $|z| < 1$?

1.

$$f(x) = x^3 e^{-x}$$

$$f'(x) = 3x^2 e^{-x} + x^3 e^{-x}\cdot(-1) = x^2(3-x)\underbrace{e^{-x}}_{>0}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\quad x_2 = 3.$$

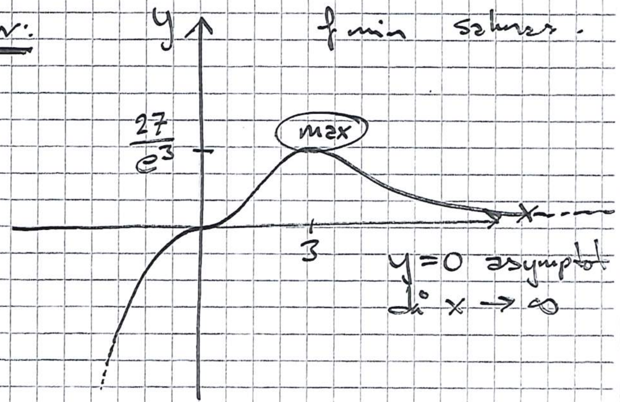
x		0		3	
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$

$$f_{max} = \frac{27}{e^3}$$

Värdetabell.

x	y
0	0
3	$\frac{27}{e^3}$
$\to\infty$	$\to 0$
$\to -\infty$	$\to -\infty$

Svar: f_{min} saknas.



2. a.

$$z^6 = \left(\frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\cdot 2e^{i\frac{\pi}{6}}}{4e^{i\frac{5\pi}{6}}}\right)^6 = \frac{2^3 e^{i\frac{3\pi}{2}}\cdot e^{i\pi}}{2^6 e^{i5\pi}} =$$

$$= \frac{1}{2^3}e^{i\left(\frac{3\pi}{2}+\pi-5\pi\right)} = \frac{1}{8}e^{i\left(-\frac{5\pi}{2}\right)} = \frac{1}{8}e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = -\frac{i}{8}$$

b. Polynomdivision och resten $= 0$ ger $a = 0$. **Svar:** $a = 0$

3 a.

$$2\cos^2 x - \sin x = 1$$

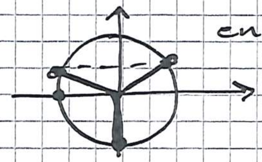
$$2(1-\sin^2 x) - \sin x = 1 \qquad \left| t = \sin x \right|$$

$$2 - 2t^2 - t = 1$$

$$2t^2 + t - 1 = 0$$

$$t^2 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{2} = 0 \iff \begin{cases} t_1 = -1 \\ t_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

enhetscirkeln.



ger **Svar:** $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{n2\pi}{3} \\ n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

b.

$$\arctan x = -\pi/3$$

$$x = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$x = \frac{\sin(-\pi/3)}{\cos(-\pi/3)} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}.$$

Svar: $x = -\sqrt{3}$.

4 a.

$$\lim_{x\to -2} \frac{x\cancel{(x+2)}}{\cancel{(x+2)}(x-2)} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

b.

$$\left| \begin{array}{l} t = x-1 \\ x \to 1 \\ t \to 0 \end{array} \right| = \lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{e^{2t}-1} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \underbrace{\frac{\ln(1+t)}{t}}_{\to 1} \cdot \frac{1}{\underbrace{\frac{e^{2t}-1}{2t}}_{\to 1}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

c. $$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln\sqrt{x+1}}{\ln x^5} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{2}\ln(x+1)}{5\ln x} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{2}\ln\left(x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)}{5\ln x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{10}\left(\frac{\ln x + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{10}\left(1 + \underbrace{\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}}_{\to 0}\right) = \underline{\underline{\frac{1}{10}}}$$

5. $2x + 3\ln x = 10\arctan x \quad , \quad x > 0$

$\Leftrightarrow \quad 2x + 3\ln x - 10\arctan x = 0$

Bilda $\quad f(x) = 2x + 3\ln x - 10\arctan x$

$$f'(x) = 2 + \frac{3}{x} - \frac{10}{1+x^2} = \frac{2x(1+x^2)+3(1+x^2)-10x}{x(1+x^2)} =$$

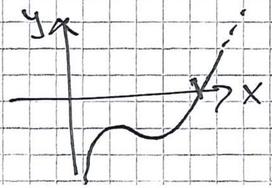
$$= \frac{2x^3+3x^2-8x+3}{x(1+x^2)} = \frac{2(x-1)(x+3)(x-\frac{1}{2})}{x(1+x^2)}$$

x	0		$\frac{1}{2}$		1	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$$f(\tfrac{1}{2}) = 1 + \underbrace{3\ln\tfrac{1}{2}}_{\substack{= -3\ln 2 \\ \approx -2,1}} - 10\underbrace{\arctan\tfrac{1}{2}}_{>0} < 0$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

f kont.



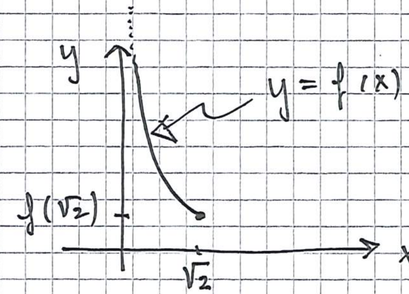
Svar: Exakt 1 reell rot.

6. $f(x) = \frac{x^2}{4} - \ln x \quad , \quad x > 0$

$$f'(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{x} = \frac{x^2-2}{x} = \frac{(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})}{x}$$

x	0		$\sqrt{2}$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$

$a = \sqrt{2}$.



$$f(\sqrt{2}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$$

$$D_g = V_f = \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2 \, , \, \infty\right[$$

$$V_g = D_f = \left]0 \, , \, \sqrt{2}\right]$$

$$g'(\tfrac{1}{4}) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2 .$$

7. $p(-1) = 0 \iff$

$$p(z) = (z+1)(z^3 - z^2 + 2z + 1)$$

Studera $f(x) = x^3 - x^2 + 2x + 1$

$$f'(x) = 3x^2 - 2x + 2 = 3\left(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}\right) =$$

$$= 3\left(\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{5}{9}\right) > 0 \Rightarrow f \text{ strängt växande.}$$

$$f(-1) = -1 - 1 - 2 + 1 < 0$$

$$f(0) = 1 > 0 \quad , \quad f \text{ kont.}$$

ger tillsammans exakt ett reellt nollställe α där $-1 < \alpha < 0$.

Övriga 2 är komplexkonjugerade ty reella koeff.

$$p(z) = (z+1)(z-\alpha)(z-(a+ib))(z-(a-ib))$$

$$\therefore \quad -\alpha(a+ib)(a-ib) = 1$$

$$|a^2 + b^2| = \left|\frac{1}{-\alpha}\right| = \frac{1}{|\alpha|} > 1$$

dvs övriga 2 ligger utanför $|z| < 1$.

Svar: Exakt ett nollställe ligger i enhetscirkelskivan, $|z| < 1$.