Linköpings universitet
Magnus Berggren, MAI

Tentamen i Analys i en variabel del 1, utbildningskod TAIU10, modul TEN1. 2025-08-18 , kl 8.00 – 13.00

Penna,radergummi,linjal och passare får användas. Formelsamlingar och andra hjälpmedel är ej tillåtna. Lösningarna skall vara fullständiga,välmotiverade,ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Uppgifterna bedöms med 0 – 3 poäng. För betyg n (n = 3, 4 eller 5) krävs minst 4(n-1) poäng. Godkänd dugga 1 och dugga 2 ger vardera 1p. Observera att bonus enbart gäller för betyget 3.

---

1) Rita grafen till funktionen $f(x) = \dfrac{x-2}{(1+x)^2}$. Eventuella asymptoter och stationära punkter ska framgå i figuren.

2) Lös ekvationen $z^3 = 8i$. Svara på formen $a+ib$.

3) Beräkna följande gränsvärden

a) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^3-2x^2+x-2}{x^2+x-6}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(xe^{3x})}{x+\ln x}$ c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}-1}{\sin 2x}$

4) Lös följande ekvationer

a) $\sin(2x+\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$ b) $\sin 3x = \cos 2x$ c) $\arccos x = \arctan x$

5) Hur många reella rötter har ekvationen

$$2\ln x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) = 3\arctan x \quad ?$$

6) Bestäm konstanterna a och b så att funktionen $f(x) = \begin{cases} x^3+x^2, & x \le 1 \\ ax^2+bx, & x > 1 \end{cases}$ blir deriverbar för alla x.

7) En likbent triangel är inskriven i enhetscirkeln. Bestäm det största värde som triangelns area kan anta.

Lösningsförslag.

1. $f(x) = \dfrac{x-2}{(1+x)^2}$, $x \neq -1$

$f'(x) = \dfrac{(1+x)^{\cancel{2}} - (x-2)\cdot 2\cancel{(1+x)}}{(1+x)^{\cancel{4}\,3}} =$

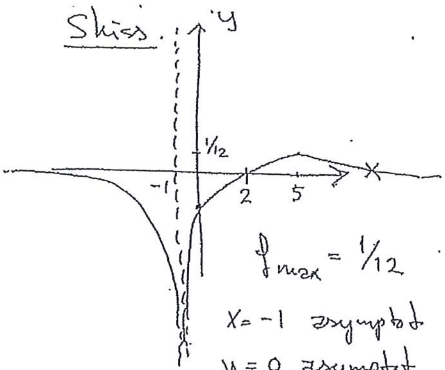
$\dfrac{1+x-2x+4}{(1+x)^3} = \dfrac{5-x}{(1+x)^3}$

x		-1		5	
$f'(x)$	$-$	$\nexists$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$\nexists$	$\nearrow$		$\searrow$

Värdetabell

x	y
5	$\frac{1}{12}$
$\to \infty$	$\to 0$
$\to -1^+$	$\to -\infty$
$\to -1^-$	$\to -\infty$
$\to -\infty$	$\to 0$
0	-2

Skiss.



$f_{max} = 1/12$

$x = -1$ asymptot

$y = 0$ asymptot.

2 $z^3 = 8i$, sätt $z = re^{i\theta}$

$r^3 e^{i3\theta} = 8e^{i\pi/2}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} r^3 = 8 \\ 3\theta = \pi/2 + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 2 \\ \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases}$

$k = 0, 1, 2$.

$k=0$

$z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{6}} = 2(\cos\pi/6 + i\sin\pi/6) = \underline{\underline{\sqrt{3}+i}}$

$k=1$

$z_2 = 2e^{i5\pi/6} = \underline{\underline{-\sqrt{3}+i}}$

$k=2$

$z_3 = 2e^{i\frac{3\pi}{2}} = \underline{\underline{-2i}}$

Svar: $\begin{cases} z_1 = \sqrt{3}+i \\ z_2 = -\sqrt{3}+i \\ z_3 = -2i \end{cases}$

3 a. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\cancel{(x-2)}(x^2+1)}{\cancel{(x-2)}(x+3)} = \dfrac{5}{5} = \underline{\underline{1}}$

b. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x + \ln e^{3x}}{x + \ln x} =$

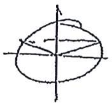
$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x + 3x}{x + \ln x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\cancel{x}(\overbrace{\frac{\ln x}{x}}^{\to 0}+3)}{\cancel{x}(1+\underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{\to 0})} = \underline{\underline{3}}$

standardgrv.

c. $\lim\limits_{x\to 0} \underbrace{\dfrac{e^{3x}-1}{3x}}_{\to 1} \cdot \dfrac{3x}{\underbrace{\frac{\sin 2x}{2x}}_{\to 1}} \cdot \dfrac{1}{2x} = \underline{\underline{\dfrac{3}{2}}}$

standardgrv.

4a. $\sin(2x + \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$



$\Leftrightarrow \quad 2x + \frac{\pi}{6} = \begin{cases} \pi/6 + n2\pi \\ 5\pi/6 + n2\pi \end{cases}, \quad n \in \mathbb{Z}.$

$\Leftrightarrow \quad 2x = \begin{cases} n2\pi \\ \frac{2\pi}{3} + n2\pi \end{cases}$

$\Leftrightarrow \quad x = \begin{cases} n\pi \\ \frac{\pi}{3} + n\pi \end{cases}, \quad n \in \mathbb{Z}$

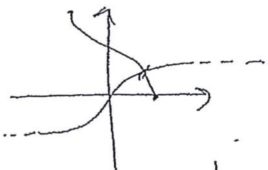
4b. $\sin 3x = \cos 2x$ trig. formel. $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$

$\Leftrightarrow \quad \sin 3x = \sin(\frac{\pi}{2} - 2x)$

$\Leftrightarrow \quad 3x = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - 2x + n2\pi \\ \pi - (\frac{\pi}{2} - 2x) + n2\pi \end{cases}$

$\Leftrightarrow \quad x = \begin{cases} \frac{\pi}{10} + \frac{n2\pi}{5} \\ \frac{\pi}{2} + n2\pi \end{cases}, \quad n \in \mathbb{Z}.$

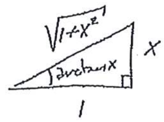
4c. $\arccos x = \arctan x$



precis en lösning

$\Rightarrow \quad x = \cos(\arctan x)$

$\Leftrightarrow \quad x = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$



$\Rightarrow \quad x^2 = \dfrac{1}{1+x^2}$

$\Leftrightarrow \quad x^4 + x^2 - 1 = 0$

$x^2 = -\frac{1}{2} \underset{(-)}{+} \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{4}{4}} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

Svar: $\underline{\underline{x = (+)\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}}}$

5.

$$2\ln x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) = 3\arctan x$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\ln x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - 3\arctan x = 0$$

Bilda $f(x) = 2\ln x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - 3\arctan x$

$x > 0$. f kont.

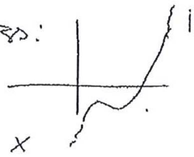
Hur många ggr skär f x-axeln?

$$f'(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}x}{1+x^2} - \frac{3}{1+x^2} =$$

$$\frac{2(1+x^2) - x^2 - 3x}{x(1+x^2)} = \frac{x^2-3x+2}{x(1+x^2)} =$$

$$= \frac{(x-1)(x-2)}{x(1+x^2)}$$

Skiss:



x	0		1		2	
$f'(x)$		+	0	−	0	+
$f(x)$		↗		↘		↗

$$f(1) = \underbrace{2\ln 1}_{=0} - \frac{1}{2}\underbrace{\ln 2}_{>0} - 3\underbrace{\arctan 1}_{=\pi/4} < 0$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2}\ln\underbrace{\left(\frac{x^4}{1+x^2}\right)}_{\to\infty} - \underbrace{3\arctan x}_{\to\pi/2} = \infty$$

Svar 1 rot (reell).

6.

f är kontinuerlig i $x=1$ om

$\lim_{x\to1} f(x) = f(1)$ dvs $a+b=2$

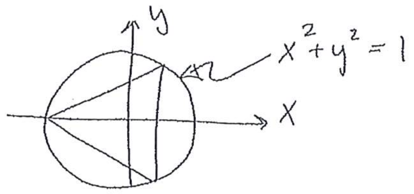
f är deriverbar i $x=1$ om

$$\lim_{h\to0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

dvs $2a+b=5$

Alltså är $\underline{a=3}$ och $\underline{b=-1}$

7.



$$A(x) = \frac{(1+x)\cdot\cancel{2}\sqrt{1-x^2}}{\cancel{2}}, \quad -1\le x\le 1$$

$$A'(x) = \sqrt{1-x^2} + (1+x)\cdot\frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{1-x^2} = \frac{x+x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\Rightarrow \quad 1-x^2 = x+x^2$$

$$2x^2+x-1=0$$

$$x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}=0$$

$$x = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16}+\frac{8}{16}} = \frac{1}{2}$$

x		$1/2$	
$A'(x)$	+	0	−
$A(x)$	↗		↘

$$A_{max} = A\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

Svar: $A_{max} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ a.e.