

**Tentamen i Analys i en variabel del 1, utbildningskod TAIU10,
modul TEN1. 2025-10-30 , kl 8.00 – 13.00**

Penna, radergummi, linjal och passare får användas. Formelsamlingar och andra hjälpmedel är ej tillåtna. Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Uppgifterna bedöms med 0 – 3 poäng. För betyg n ($n = 3, 4$ eller 5) krävs minst $4(n-1)$ poäng. Godkänd dugga 1 och dugga 2 ger vardera 1 p. Observera att bonus enbart gäller för betyg 3.

1. Bestäm argument och absolutbelopp till $z = \frac{(1-i)(1+i\sqrt{3})}{i(\sqrt{12}-2i)}$.
2. Lös ekvationen $2\sin^2 x + 3\sin x \cos x - \cos^2 x = 2$.
3. Lösningarna till ekvationen $z^3 = -8i$ bildar hörnen i en triangel. Beräkna triangelns area.
4. Avgör om följande gränsvärden existerar och bestäm i så fall deras värden.
 - (a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - x - 2}$.
 - (b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^4 + x} - x^2$.
 - (c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(xe^{2x})}{x + \sin x}$.
5. Rita funktionen $y(x) = \frac{x+1}{x-1} + 2 \arctan x$ och ange alla asymptoter och lokala extrempunkter.
6. Betrakta grafen till funktionen $f(x) = \frac{x}{x+1}$, $x \geq 0$. Låt P vara en punkt på kurvan. Normalen till kurvan i P och normalen till x-axeln genom P bildar tillsammans med x-axeln en triangel. Har triangelarean ett största värde? I så fall vilket är det största värdet?
7. Hur många rötter har ekvationen $1 - \sqrt{1-x^2} = \frac{\arcsin x}{2}$.

Kortfattade Lösningsförslag

T-2025-10-30.

1. Gå över till polär form

Ex. $\sqrt{12} - 2i = 2\sqrt{3} - 2i = 2(\sqrt{3} - i) =$

$$= 4 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) = 4 e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

Rita. $\uparrow$
 $\begin{matrix} \text{Im} \\ \text{Re} \end{matrix}$
 $\theta = -\frac{\pi}{6}$

$$r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\begin{aligned} Z &= \frac{(1-i)(1+i\sqrt{3})}{i(\sqrt{12}-2i)} = \frac{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} \cdot 2e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{2}} 4e^{-i\frac{\pi}{6}}} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{e^{i(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})}}{e^{i(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6})}} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i(\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{3})} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \end{aligned}$$

Svar: $|Z| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\arg Z = -\frac{\pi}{4} + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

2. $2\sin^2 x + 3\sin x \cos x - \cos^2 x = 2$

/ trig. enh. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
 $\Leftrightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

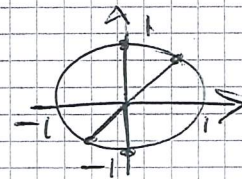
$$\Leftrightarrow 2(1 - \cos^2 x) + 3\sin x \cos x - \cos^2 x = 2$$

$$\Leftrightarrow 2 - 3\cos^2 x + 3\sin x \cos x = 2$$

$$\Leftrightarrow 3\cos x (\sin x - \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \quad \text{eller} \quad \sin x = \cos x$$

Rita enhetscirkeln.



$$\text{Svar: } x = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + n\pi \\ \frac{\pi}{4} + n\pi \end{cases}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

3. $\bar{z}^3 = -8i$

/ Sub. $z = re^{i\theta}$ /

$$(re^{i\theta})^3 = 8e^{i(\frac{3\pi}{2} + k2\pi)}$$

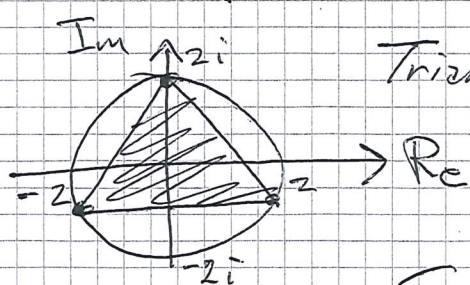
$$\Leftrightarrow \begin{cases} r^3 = 8 \\ 3\theta = \frac{3\pi}{2} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = 2 \\ \theta = \frac{\pi}{2} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases}, k = 0, 1, 2$$

$k=0$ ger $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2i$

$k=1$ ger $z_2 = 2e^{i\frac{7\pi}{6}} = -\sqrt{3} - i$

$k=2$ ger $z_3 = 2e^{i\frac{11\pi}{6}} = \sqrt{3} - i$



Triangelns areal $= \frac{b \cdot h}{2}$

$$A = \frac{2\sqrt{3} \cdot 3}{2} = 3\sqrt{3}$$

Svar: $3\sqrt{3}$

4 a.

$$\frac{x^2 + x - 6}{x^2 - x - 2} = \frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+1)} \xrightarrow{\text{da } x \rightarrow 2} \frac{5}{3}$$

Faktorsatz

Svar: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - x - 2} = \frac{5}{3}$

4b. $\sqrt{x^4 + x} - x^2 = \text{typ } \infty - \infty = \text{Konj. osv}$

$$= \frac{(\sqrt{x^4 + x} - x^2)(\sqrt{x^4 + x} + x^2)}{\sqrt{x^4 + x} + x^2} =$$

$$= \frac{x^4 + x - x^4}{\sqrt{x^4(1 + \frac{1}{x^3})} + x^2} = \frac{x}{x^2(\sqrt{1 + \frac{1}{x^3}} + 1)} =$$

$$= \frac{1}{\overset{\rightarrow \infty}{x} (\overset{\rightarrow 0}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^3}}} + \overset{\rightarrow 2}{1})} \rightarrow 0 \text{ da } x \rightarrow \infty$$

Svar: $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^4 + x} - x^2) = 0$

$$\begin{aligned}
 4c. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(xe^{2x})}{x + \sin x} &= \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x + \ln e^{2x}}{x(1 + \frac{\sin x}{x})} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(\frac{\ln x}{x} + 2)}{x(1 + \frac{\sin x}{x})} = \frac{0+2}{1+0} = 2
 \end{aligned}$$

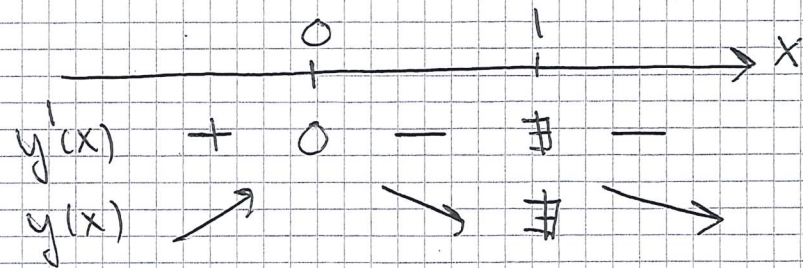
$$\left| \frac{\ln x}{x} \rightarrow 0 \text{ da } x \rightarrow \infty \right| \text{ Standard. } \quad \left| \sin x \leq 1 \right| \text{ f\"ur alle } x$$

Svar: Gr.v = 2.

$$5. \quad y(x) = \frac{x+1}{x-1} + 2 \arctan x, \quad x \neq 1$$

$$\begin{aligned}
 y'(x) &= \frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2} + 2 \frac{1}{1+x^2} = \\
 &= \frac{-2}{(x-1)^2} + \frac{2}{1+x^2} = \frac{2(-(1+x^2) + (x-1)^2)}{(x-1)^2(1+x^2)} = \\
 &= \frac{2(-1-x^2+x^2-2x+1)}{(x-1)^2(1+x^2)} = \frac{-4x}{(x-1)^2(1+x^2)}
 \end{aligned}$$

Teckenstudie av $y'(x)$



Värdetabell

$$y(x) = \frac{x+1}{x-1} + 2 \arctan x = 1 + \frac{2}{x-1} + 2 \arctan x$$

Polynomdivision. $\rightarrow \pi/2$ da $x \rightarrow \infty$

x	y
0	-1
$\rightarrow 1^-$	$\rightarrow -\infty$
$\rightarrow 1^+$	$\rightarrow \infty$
$\rightarrow \infty$	$\rightarrow 1 + \pi$
$\rightarrow -\infty$	$\rightarrow 1 - \pi$

$\arctan x \rightarrow -\pi/2$ da $x \rightarrow -\infty$

$\arctan 0 = 0$

$\arctan 1 = \pi/4$

$y = 1 + \pi$ asymptot da $x \rightarrow \infty$

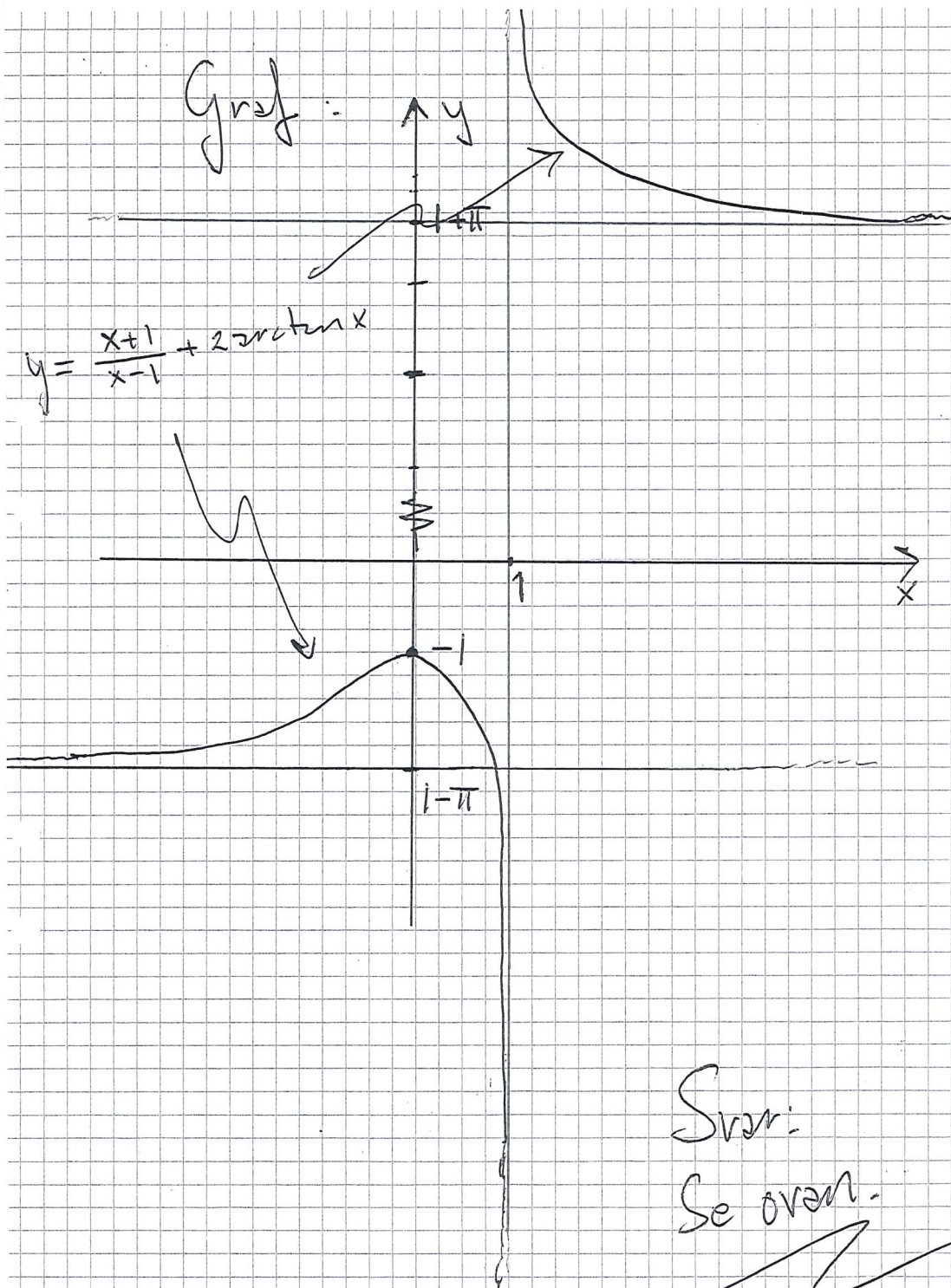
$y = 1 - \pi$ asymptot da $x \rightarrow -\infty$

lokalt maximum i $(0, -1)$.

$x = 1$ vertikal asymptot.

Graf:

$$y = \frac{x+1}{x-1} + 2 \arctan x$$



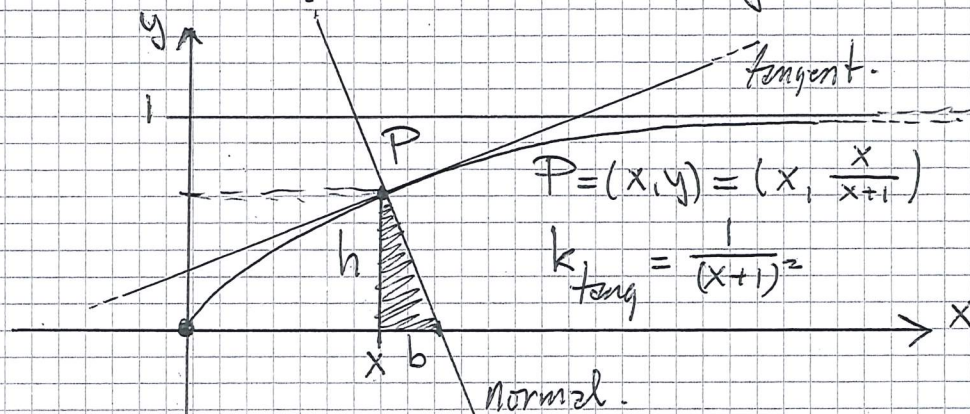
Svar:

Se oven.

6. $f(x) = \frac{x}{x+1}, \quad x \geq 0$

$$f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} > 0 \Rightarrow f \text{ strängt v\u00e4x.}$$

$$x \rightarrow \infty \Rightarrow y \rightarrow 1, \quad f(0) = 0$$



$$k_{\text{tang}} \cdot k_{\text{normal}} = -1 \quad k_{\text{normal}} = -(x+1)^2$$

$$\frac{h}{b} = (x+1)^2 \Leftrightarrow b = \frac{h}{(x+1)^2}$$

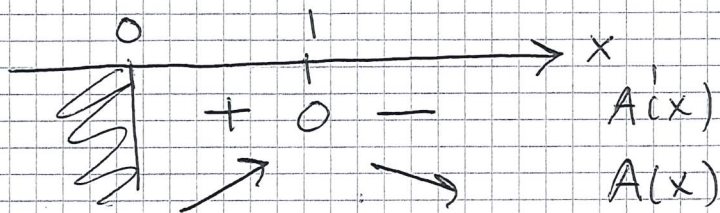
$$h = \frac{x}{x+1} \quad \text{ger} \quad b = \frac{x}{(x+1)^3}$$

$$\text{Arean} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{x^2}{2(x+1)^4} = A(x)$$

Sök ev. $A_{\max}$.

$$A'(x) = \frac{1}{2} \frac{2x(x+1)^4 - x^2 4(x+1)^3}{(x+1)^8} =$$

$$= \frac{x(x+1) - 2x^2}{(x+1)^5} = \frac{x(1-x)}{(x+1)^5}, \quad x > 0$$



$x=1$ ger $A_{\max}$.

$$A_{\max} = A(1) = \frac{1}{2(1+1)^4} = \frac{1}{32}$$

Svar: Ett globalt $A_{\max}$ finns.

$$A_{\max} = \frac{1}{32}$$

7. Antal rötter till ev.

$$1 - \sqrt{1-x^2} = \frac{\arcsin x}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1 - \sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2} \arcsin x = 0$$

Bild: $f(x) = 1 - \sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2} \arcsin x$

Analysera f .

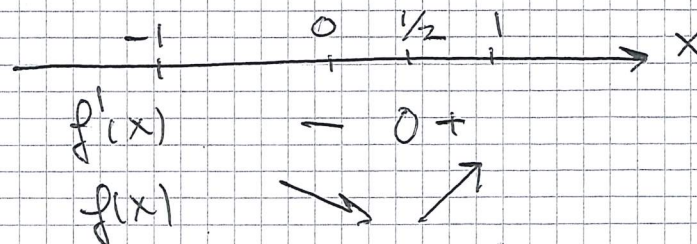
Antal nollställen?

$$D_f = [-1, 1]$$

$$f(0) = 0 \quad \therefore \text{Minst ett.}$$

$$f'(x) = -\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \frac{x - \frac{1}{2}}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \quad ? \quad x = \frac{1}{2}$$



$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{\pi}{6}$$

$$= 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{12} = 1 - \frac{6\sqrt{3} + \pi}{12} < 0$$

$$\sqrt{3} > 1,5 \dots \text{or}$$

Enklare. $f(0) = 0$

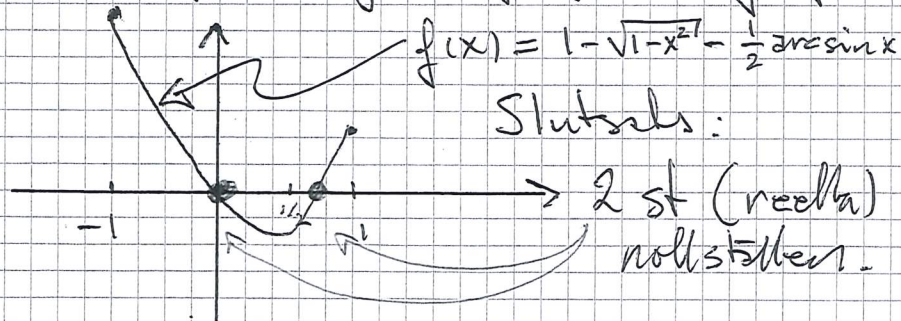
$$f(1) = 1 - \frac{1}{2} \arcsin 1 = 1 - \frac{\pi}{4} > 0$$

$$= \frac{\pi}{2} \quad \pi \approx 3,14$$

f kont.

Detta tillsammans med teckenstudie

av $f'(x)$ ger följande graf.



Svar: 2 st.