Linköpings universitet
Magnus Berggren, MAI

Tentamen i Analys i en variabel del 2, utbildningskod TAIU10, modul TEN2. 2020-01-17, kl 8.00 – 13.00

Penna,radergummi,linjal,passare och gradskiva får användas. Formelsamlingar och andra hjälpmedel är ej tillåtna. Lösningarna skall vara fullständiga,välmotiverade,ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Uppgifterna bedöms med 0 – 3 poäng. För betyg n ($n = 3, 4$ eller 5) krävs minst $4(n\text{-}1)$ poäng. Godkänd dugga 3 ger 1-2 bonuspoäng. Observera att bonus enbart gäller för betyget 3. Skriv på omslaget hur många bonuspoäng (B=0,B=1 eller B=2) du har.

---

1) Beräkna

a) $\int x^2 \ln x \, dx$ (1p) b) $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx$ (1p) c) $\int \frac{x-5}{x^2-5x+6} \, dx$ (1p)

2) Bestäm den lösning till differentialekvationen $y'' - 3y' + 2y = 4xe^{3x}$ som uppfyller villkoren $y(0) = 0$ och $y'(0) = 6$. (3p)

3)

a) Beräkna Maclaurinpolynomet av grad 3 till $f(x) = \ln(1 + \sin x)$ (1p)

b) Bestäm gränsvärdet $\lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos x}{e^x - 1 - x}$ (1p)

c) Har funktionen $f(x) = x\sin(2x + x^2) - 2x^2 - x^3$ lokalt extremvärde för $x = 0$? Ange om det eventuella extremvärdet är lokalt *max* eller lokalt *min*. (1p)

4) Beräkna volymen av den kropp som uppkommer då området mellan x-axeln och kurvan $y = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$, $0 \le x \le 1$ roteras ett varv kring y-axeln. (3p)

5)

a) Visa att $y = \frac{x}{\ln x}$ är en lösning till differentialekvationen $x^2y' = xy - y^2$ (1p)

b) Bestäm den lösning till differentialekvationen $y' + xy = e^{-\frac{x^2}{2}}$ som uppfyller begynnelsevillkoret $y(0) = 1$. (2p)

6) En kurva ges i polära koordinater av $r = \sin^2(3\vartheta)$, $0 \le \vartheta \le 2\pi$. Hur stor area har området som innesluts av kurvan? (3p)

7) Bestäm konstanten A så att gränsvärdet

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(3x+2) + \ln(3x-2) - 2\ln x + A}{\arctan(1 - \cos\frac{1}{x})}$$

existerar ändligt. Bestäm också gränsvärdet. (3p)

1 a. $\int x^2 \ln x \, dx \underset{p.i}{=} \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}\,dx =$

$= \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^2}{3}\,dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + C$

b. $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = \left/ \begin{array}{l} t = \sqrt{x} \\ \frac{dt}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ 2\,dt = \frac{dx}{\sqrt{x}} \end{array} \right/ =$

$= \int 2\sin t\,dt = -2\cos t + C = -2\cos\sqrt{x} + C$

c. $\int \frac{x-5}{x^2-5x+6}\,dx = \int \frac{x-5}{(x-2)(x-3)}\,dx =$

PBU $= \int \left(\frac{A^{=3}}{x-2} + \frac{B^{=-2}}{x-3} \right) dx = \int \left(\frac{3}{x-2} - \frac{2}{x-3} \right) dx$

$= 3\ln|x-2| - 2\ln|x-3| + C$

2. $y'' - 3y' + 2y = 4xe^{3x}$

I. Sök y_h: $r^2 - 3r + 2 = 0$

$r_1 = 1, \quad r_2 = 2$

$y_h = Ce^x + De^{2x}$

II. Sök y_p. Sub. $y = ze^{3x}, \quad z = z(x)$

$y' = z'e^{3x} + 3ze^{3x} = (z' + 3z)e^{3x}$

$y'' = \dots = (z'' + 6z' + 9z)e^{3x}$

insättning och förkortning av e^{3x} ger

$z'' + 6z' + 9z - 3(z' + 3z) + 2z = 4x$

$z'' + 3z' + 2z = 4x$

Ansats: $z_p = ax + b, \quad z_p' = a, \quad z_p'' = 0$

$3a + 2(ax + b) = 4x$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 4 \\ 3a + 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \end{cases}$

$y_p = (2x-3)e^{3x}$

$y = y_h + y_p = Ce^x + De^{2x} + (2x-3)e^{3x}$

$$y' = Ce^{x} + 2De^{2x} + (2x-3)3e^{3x} + 2e^{3x}$$

$y(0) = 0$ ger $C + D - 3 = 0$

$y'(0) = 6$ ger $C + 2D - 9 + 2 = 6$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C + D = 3 \\ C + 2D = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = -7 \\ D = 10 \end{cases}$$

Svar: $y = -7e^{x} + 10e^{2x} + (2x-3)e^{3x}$

3a. $\ln(1+\sin x) = \ln\left(1 + \left(x - \frac{x^3}{3!} + O(x^5)\right)\right) =$

$$= \Big/ \begin{array}{l} \ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \dots \\ t = x - \frac{x^3}{6} + O(x^5) \end{array} \Big/ =$$

$$= x - \frac{x^3}{6} - \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!}\right)^2}{2} + \frac{\left(x + O(x^3)\right)^3}{3} + O(x^4) =$$

$$= x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + O(x^4) =$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + O(x^4)$$

Svar: $P_3(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$.

3b. $$\lim_{x\to 0} \frac{\ln \cos x}{e^x - 1 - x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(1 + \left(-\frac{x^2}{2} + O(x^4)\right)\right)}{1 + x + \frac{x^2}{2!} + O(x^3) - 1 - x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^2}{2} + O(x^4)}{\frac{x^2}{2} + O(x^3)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^2}\left(-\frac{1}{2} + \overbrace{O(x^2)}^{\to 0}\right)}{\cancel{x^2}\left(\frac{1}{2} + \underbrace{O(x)}_{\to 0}\right)} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = -1$$

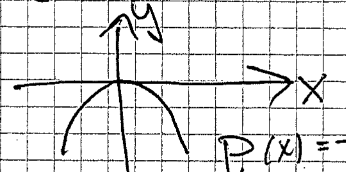
Svar: -1.

3c. $f(x) = x\sin(2x + x^2) - 2x^2 - x^3 =$

$$= x\left(2x + x^2 - \frac{(2x+x^2)^3}{3!} + O(x^5)\right) - 2x^2 - x^3 =$$

$$= 2x^2 + x^3 - \frac{4x^4}{3} + O(x^5) - 2x^2 - x^3 =$$

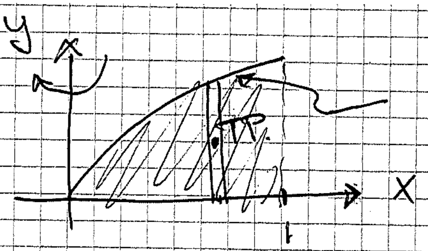
$$= -\frac{4}{3}x^4 + O(x^5) \approx -\frac{4}{3}x^4 \text{ för } x \text{ nära noll}$$



$P_4(x) = -\frac{4}{3}x^4$

Svar: lokalt max i $x = 0$.

4.



$y = \frac{\sqrt{x}}{x+1}, \ 0 \le x \le 1.$

$V = \int (\text{TP:s väg})\text{ arean} = \int_0^1 2\pi x y \, dx =$

$= 2\pi \int_0^1 \frac{x\sqrt{x}}{x+1} dx = \Big/ \begin{matrix} t = \sqrt{x} \\ x = t^2 \\ dx = 2t\,dt \end{matrix} \Big/ =$

$= 2\pi \int_0^1 \frac{t^2 \cdot t}{t^2+1} 2t\,dt = 4\pi \int_0^1 \frac{t^4}{t^2+1} dt =$

$= 4\pi \int_0^1 \frac{t^2(t^2+1) - (t^2+1) + 1}{t^2+1} dt =$

Polynomdivision.

$= 4\pi \int_0^1 \left(t^2 - 1 + \frac{1}{t^2+1}\right) dt =$

$= 4\pi \left[\frac{t^3}{3} - t + \arctan t\right]_0^1 = 4\pi\left(-\frac{2}{3} + \frac{\pi}{4}\right) =$

$= \underline{\underline{\pi\left(\pi - \frac{8}{3}\right)}}$ v.e.

5. a. $y = \frac{x}{\ln x}$

$y' = \frac{\ln x - x \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$

$V.L = x^2 y' = \frac{x^2(\ln x - 1)}{(\ln x)^2}$

$H.L = xy - y^2 = \frac{x^2}{\ln x} - \frac{x^2}{(\ln x)^2} = \frac{x^2 \ln x - x^2}{(\ln x)^2} =$

$= \frac{x^2(\ln x - 1)}{(\ln x)^2} = V.L.$ vilket

visar att $y = \frac{x}{\ln x}$ är <u>en</u> lösning

till diff.ekv. $x^2 y' = xy - y^2$.

5 b. $y' + xy = e^{-\frac{x^2}{2}}$ $\left(\begin{matrix} g(x) = x \\ G(x) = \frac{x^2}{2} \end{matrix} \right)$

$\Big/ \begin{matrix} i.f = e^{G(x)} = e^{\frac{x^2}{2}} \\ \text{mult. med i.f} \end{matrix} \Big/$

$y' e^{\frac{x^2}{2}} + x e^{\frac{x^2}{2}} y = e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$

$\left(y e^{\frac{x^2}{2}}\right)' = 1$

$$y e^{\frac{x^2}{2}} = \int 1\,dx = x + C$$

$$y = \frac{x + C}{e^{\frac{x^2}{2}}}$$

$y(0) = 1$ ger $1 = \frac{C}{e^0} \Rightarrow C = 1$

Svar: $\underline{\underline{y = (x+1)e^{-\frac{x^2}{2}}}}$

6. $r = \sin^2(3\varphi)$, $0 \le \varphi \le 2\pi$

$$\text{Arean} = \int_0^{2\pi} \pi r^2 \cdot \frac{d\varphi}{2\pi} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin^4(3\varphi)\,d\varphi$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(\frac{1 - \cos 6\varphi}{2}\right)^2 d\varphi =$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^{2\pi} \Big(1 - 2\cos 6\varphi + \underbrace{\cos^2 6\varphi}_{= \frac{1 + \cos 12\varphi}{2}}\Big)\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} - 2\cos 6\varphi + \frac{1}{2}\cos 12\varphi\right) d\varphi =$$

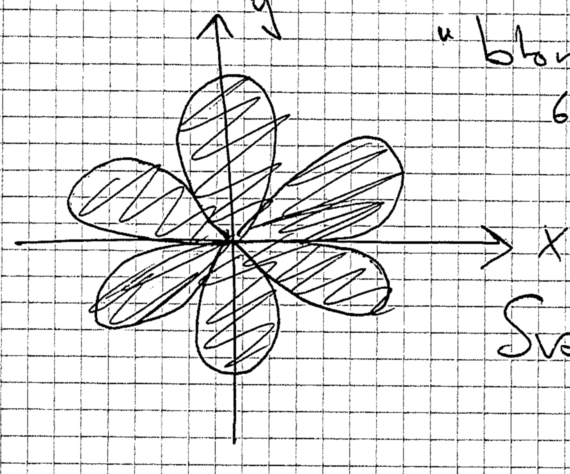
$$= \frac{1}{8}\left[\frac{3}{2}\varphi - \frac{2\sin 6\varphi}{6} + \frac{1}{2}\,\frac{\sin 12\varphi}{12}\right]_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{1}{8}\cdot 3\pi = \underline{\underline{\frac{3\pi}{8}}} \text{ a.e.}$$

trig. formler. $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$

$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$

$r = \sin^2(3\varphi) = \frac{1 - \cos 6\varphi}{2}$



"blomma" med 6 st blad.

Svar: $\underline{\underline{\text{Arean} = \frac{3\pi}{8} \text{ a.e.}}}$

7.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(3x+2)+\ln(3x-2)-2\ln x + A}{\arctan\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{9x^2-4}{x^2}\right)+A}{\arctan\left(1-\left(1-\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2}{2}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{x^4}\right)\right)\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(9-\frac{4}{x^2}\right)+A}{\arctan\left(\frac{1}{2x^2}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{x^4}\right)\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln 9+\ln\left(1+\frac{-4}{9x^2}\right)+A}{\frac{1}{2x^2}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{x^4}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln 9+\left(\frac{-4}{9x^2}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{x^4}\right)\right)+A}{\frac{1}{2x^2}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{x^4}\right)} =$$

$$= \left/ \begin{array}{c} \text{Gr.v exist ändligt} \\ \Longleftrightarrow \\ A=-\ln 9 \end{array} \right/ = \lim_{\substack{x\to\infty \\ \uparrow \\ A=-\ln 9}} \frac{-\frac{4}{9x^2}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{x^4}\right)}{\frac{1}{2x^2}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{x^4}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{4}{9}+\overbrace{\mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)}^{\to 0}}{\frac{1}{2}+\underbrace{\mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)}_{\to 0}} = -\frac{8}{9}$$

Svar: $A=-\ln 9$

Gr.v $= -8/9$