**Linköpings universitet**
Magnus Berggren, MAI

# Tentamen i Analys i en variabel del 2, utbildningskod TAIU10, modul TEN2. 2020-03-16, kl 14.00 – 19.00

Penna,radergummi,linjal,passare och gradskiva får användas. Formelsamlingar och andra hjälpmedel är ej tillåtna. Lösningarna skall vara fullständiga,välmotiverade,ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Uppgifterna bedöms med 0 – 3 poäng. För betyg $n$ ($n = 3, 4$ eller $5$) krävs minst $4(n\text{-}1)$ poäng. Godkänd dugga 3 ger 1-2 bonuspoäng. Observera att bonus enbart gäller för betyget 3. Skriv på omslaget hur många bonuspoäng (B=0,B=1 eller B=2) du har.

---

1) Beräkna följande integraler

a) $\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin 2x\,dx$ b) $\displaystyle\int_3^4 \frac{4}{x^2-4}dx$ c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^4}}dx$

2) Räkna ut volymen av den rotationskropp som bildas då ytan mellan kurvan $y = \ln(1+x^2)$ , $0 \le x \le 2$ , x-axeln och linjen x=2 roterar ett varv kring y-axeln.

3) Lös differentialekvationen $y''(x) - 2y'(x) - 3y(x) = 9xe^{2x}$ under begynnelsevillkoren $y(0) = y'(0) = 0$.

4) a) Bestäm Maclaurinutvecklingen av ordning 3 med resterm i ordoform av

$$f(x) = e^{x^2}\sin x \qquad \text{(1p)}$$

b) Funktionen $f$ är definierad som $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{3x}-1}{\sin 5x}, & x \neq 0, \\ a, & x = 0. \end{cases}$

Hur ska konstanten $a$ väljas för att $f$ ska bli kontinuerlig för $x = 0$ ? (2p)

5) Bestäm den lösning till differentialekvationen $\dfrac{y'(x)}{\cos x} - y(x) = \sin x$ som uppfyller villkoret $y(\pi) = 0$

6) Genom ett klot med radie 2 cm borras ett cylindriskt hål med radie 1 cm , på så sätt att cylinderns symmetriaxel går genom klotets medelpunkt. Bestäm volymen av den del som återstår.

7) Lös integralekvationen $\displaystyle\frac{2}{3}\int_1^{x^3} \frac{y(\sqrt[3]{t})}{t}dt + (x^2+1)y = 4$ och ange lösningens definitionsmängd.

Kortfattade lösningsförslag till ~~Tentamen~~

Analys i en variabel del 2 TAIU10

# 2020-03-16

1. a. $\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin 2x\,dx \underset{p.i}{=} \left[-\frac{\cos 2x}{2}\cdot x\right]_0^{\pi} - \underbrace{\int_0^{\pi} -\frac{\cos 2x}{2}\,dx}_{=0} =$

$\displaystyle -\frac{\cos 2\pi}{2}\cdot\pi + 0 = \underline{\underline{-\pi/2}}$

b. $\displaystyle\int_3^4 \frac{4}{x^2-4}\,dx = \int_3^4 \frac{4}{(x+2)(x-2)}\,dx = \int_3^4\left(\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-2}\right)dx$

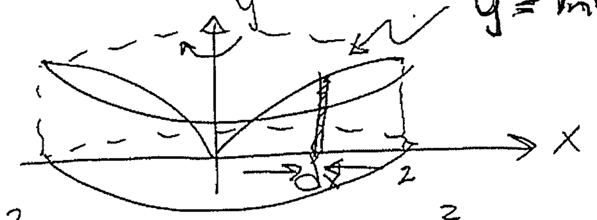
$\displaystyle = \Big/ \begin{matrix} A=-1 \\ B=1\end{matrix} \Big/ = \Big[\ln|x-2| - \ln|x+2|\Big]_3^4 =$

$\displaystyle \ln 2 - \ln 6 - (\underbrace{\ln 1}_{=0} - \ln 5) = \underline{\underline{\ln\frac{5}{3}}}$

c. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^4}}\,dx = \Bigg/ \begin{matrix} t = 1+x^4 \\ dt = 4x^3dx \\ \text{byt gränser}\end{matrix} \Bigg/ =$

$\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{4\sqrt{t}}\,dt = \frac{1}{2}\Big[\sqrt{t}\Big]_1^2 = \underline{\underline{\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)}}$

2. $y = \ln(1+x^2)$



$\displaystyle V = \int_0^2 2\pi x \underbrace{y\,dx}_{=\text{area}} = 2\pi\int_0^2 x\ln(1+x^2)\,dx = \Bigg/ \begin{matrix} t = 1+x^2 \\ dt = 2x\,dx \\ \text{byter gränser}\end{matrix} \Bigg/$

"skalformeln"

$2\pi X = $ TP: s r 2g.

$\displaystyle = \pi\int_1^5 1\cdot\ln t\,dt \underset{p.i}{=} \pi\left(\Big[t\ln t\Big]_1^5 - \int_1^5 t\cdot\frac{1}{t}\,dt\right)$

$\displaystyle = \pi\left(5\ln 5 - 5\ln 1 - \Big[t\Big]_1^5\right) =$

$\displaystyle \pi(5\ln 5 - 4) = \underline{\underline{\pi(5\ln 5-4)}}$ V.e.

3. $y'' - 2y' - 3y = 9xe^{2x}$

(I). Sök $y_h$.

K.E. $r^2 - 2r - 3 = 0$

$r = 1 \pm\sqrt{1+3} = 1\pm 2 = \begin{cases} 3 \\ -1\end{cases}$

$y_h = Ce^{3x} + De^{-x}$

(II) Sök $y_p$.

Sub. $y = ze^{2x}$ där $z = z(x)$

$$y' = (z' + 2z)e^{2x}$$

$$y'' = (z'' + 4z' + 4z)e^{2x}$$ insättning ger

$$(z'' + 4z' + 4z - 2(z' + 2z) - 3z)\cancel{e^{2x}} = 9x\cancel{e^{2x}}$$

$$z'' + 2z' - 3z = 9x$$

Ansats. $z_p = ax + b$.

$z_p' = a \qquad z_p'' = 0$ insättning ger

$$2a - 3(ax+b) = 9x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3a = 9 \\ 2a - 3b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -3 \\ b = -2 \end{cases}$$

$$y_p = (-3x-2)e^{2x}$$

$$y = y_h + y_p = Ce^{3x} + De^{-x} - (3x+2)e^{2x}$$

$$y' = 3Ce^{3x} - De^{-x} - 3e^{2x} - 2(3x+2)e^{2x}$$

$y(0) = y'(0) = 0$

ger $\begin{cases} C + D = 2 \\ 3C - D = 7 \end{cases} \iff \begin{cases} C = \frac{9}{4} \\ D = -\frac{1}{4} \end{cases}$

Svar: $y = \frac{9}{4}e^{3x} - \frac{1}{4}e^{-x} - (3x+2)e^{2x}$

4 a. $f(x) = e^{x^2} \cdot \sin x = \Big/ \; e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \dots, \quad t = x^2 \; \Big/$

$$= \left(1 + x^2 + \mathcal{O}(x^4)\right)\left(x - \frac{x^3}{3!} + \mathcal{O}(x^5)\right) =$$

$$x - \frac{x^3}{6} + x^3 + \mathcal{O}(x^5) = x + \frac{5}{6}x^3 + \mathcal{O}(x^5)$$

b. $f$ kont. för $x = 0 \iff \lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{e^{3x} - 1}{\sin 5x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + 3x + \mathcal{O}(x^2) - 1}{5x + \mathcal{O}(x^3)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}(3 + \underbrace{\mathcal{O}(x)}_{\to 0})}{\cancel{x}(5 + \underbrace{\mathcal{O}(x^2)}_{\to 0})} = \frac{3}{5}$$

$f(0) = a$. Svar: $a = \frac{3}{5}$

således $a = 3/5$

**5** $y' - \cos x\, y = \sin x \cos x$ $*$

$i.f = e^{-\sin x}$ . mult. $*$ med i.f.

$$\underbrace{y' e^{-\sin x} - \cos x\, e^{-\sin x} y}_{= (y e^{-\sin x})'} = \sin x \cos x\, e^{-\sin x}$$

$$y e^{-\sin x} = \int \sin x \cos x\, e^{-\sin x}\, dx = \Big/ \begin{matrix} t = \sin x \\ dt = \cos x\, dx \end{matrix} \Big/$$

$$\int t e^{-t} dt \underset{p.i}{=} -e^{-t} \cdot t + \int e^{-t} dt =$$

$$- t e^{-t} - e^{-t} + C$$

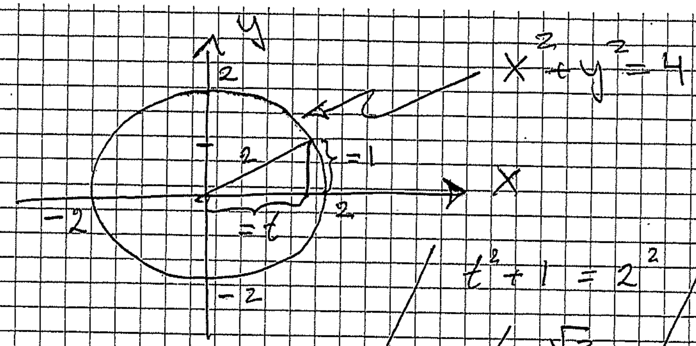
$$y = -t - 1 + C e^{\sin x} = -\sin x - 1 + C e^{\sin x}$$

$y(\pi) = 0$. ger $0 = -1 + C \iff C = 1$

Svar: $y = -\sin x - 1 + e^{\sin x}$

där $\pi/2 < x < 3\pi/2$

6.




$t^2 + 1 = 2^2$

$t = \sqrt{3}$ .

$$V = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \pi y^2 dx = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} (4 - x^2)\, dx =$$

$$= 2\pi \left[ 4x - \frac{x^3}{3} \right]_0^{\sqrt{3}} = 2\pi \left( 4\sqrt{3} - \frac{(\sqrt{3})^3}{3} \right) =$$

$$= 2\pi (4\sqrt{3} - \sqrt{3}) = 6\pi\sqrt{3}$$

$$V_{cylinder} = \pi \cdot 1^2 \cdot 2\sqrt{3} = 2\pi\sqrt{3}$$

$$V_{återstående} = 6\pi\sqrt{3} - 2\pi\sqrt{3} = 4\pi\sqrt{3}$$

Svar: $4\pi\sqrt{3}$ v.e.

7. derivering ger

$$\frac{2}{3}\,\frac{y(x)}{x^3}\,3x^2 + 2x\,y(x) + (x^2+1)\,y'(x) = 0$$

$$\left(\frac{2}{x} + 2x\right) y(x) + (x^2+1)\,y'(x) = 0$$

$$\frac{2}{x}\,(1 + x^2)\,y(x) + (x^2+1)\,y'(x) = 0$$

$$y'(x) + \frac{2}{x}\,y(x) = 0$$

$$/\ i.f = e^{\int \frac{2}{x}\,dx} \underset{x>0}{=} e^{2\ln x} = x^2\ /$$

$$y x^2 = C$$

$$y = \frac{C}{x^2}, \quad x > 0.$$

$x=1$ ger $\underbrace{\frac{2}{3}\int_1^1 \frac{y(\sqrt[3]{t})}{t}\,dt}_{=0} + 2y(1) = 4 \iff y(1) = 2$

ger $C = 2$. Svar: $y = \frac{2}{x^2}$, $x > 0$