Linköpings universitet
Magnus Berggren, MAI

Tentamen i Analys i en variabel del 2, utbildningskod TAIU10, modul TEN2. 2021-01-12, kl 8.00 – 13.00

Penna,radergummi,linjal,passare och gradskiva får användas. Formelsamlingar och andra hjälpmedel är ej tillåtna. Lösningarna skall vara fullständiga,välmotiverade,ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Uppgifterna bedöms med 0 – 3 poäng. För betyg n ($n = 3, 4$ eller 5) krävs minst 4(n-1) poäng. Godkänd dugga 3 ger 1-2 bonuspoäng. Observera att bonus enbart gäller för betyget 3. Skriv på omslaget hur många bonuspoäng (B=0,B=1 eller B=2) du har.

---

1) Bestäm en primitiv funktion till följande funktioner

$$\text{a) } (x+1)\cos(3x) \qquad \text{b) } \frac{\sqrt{2+x}}{x+3} \qquad \text{c) } \frac{\cos x}{\sin^2 x + 2\sin x + 5}.$$

2) Bestäm den lösning till differentialekvationen

$$(x-1)e^{2x}y' + \frac{e^{2x}}{x}y = x^2, \quad x > 1,$$

för vilken gäller att $\lim_{x\to\infty} y(x) = 1$.

3) Bestäm alla lösningar till differentialekvationen

$$y''(x) + 2y'(x) - 3y(x) = e^{-3x}.$$

4) Räkna ut volymen av den rotationskropp som bildas då ytan mellan kurvan $y = \cos(2x)$, $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$, x-axeln och linjen $x = 0$ roterar ett varv kring x-axeln.

5) Beräkna

$$\text{a) } \lim_{x\to 0} \frac{x + \cos(2x) - e^x}{\sin(3x^2)} \qquad \text{b) } \lim_{x\to 2} \frac{\ln(2x-3)}{\sin(x-2)} \qquad \text{c) } \int_2^\infty \frac{dx}{x^2-1}.$$

6) Undersök om $f(x) = \ln(\cos x) + \frac{x^2}{2}$ har lokalt maximum eller minimum i punkten $x = 0$.

7) Betrakta kurvan som på polär form ges av $r(\theta) = 1 + \sin\theta$, $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$. Räkna ut arean av den rotationsyta som bildas då kurvan roterar ett varv kring y-axeln.

Kortfattade lösningsförslag till tentamen

Analys i en variabel, del2 21-01-12

1. a.

$$\int \underset{\downarrow}{(x+1)}\,\underset{\uparrow}{\cos 3x}\,dx \underset{\text{p.i}}{=} \frac{\sin 3x}{3}(x+1) - \int \frac{\sin 3x}{3}dx$$

$$= \frac{x+1}{3}\sin 3x + \frac{\cos 3x}{9} + C$$

Svar: $\frac{x+1}{3}\sin 3x + \frac{\cos 3x}{9}$

b.

$$\int \frac{\sqrt{2+x}}{x+3}dx = \left/ \begin{array}{c} t=\sqrt{2+x} \\ x = t^2-2 \\ dx = 2t\,dt \end{array} \right/ =$$

$$= \int \frac{t}{t^2-2+3} 2t\,dt = 2\int \frac{t^2}{t^2+1}dt =$$

Polynom-div.

$$= 2\int \left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right)dt =$$

$$2(t - \arctan t) + C$$

Svar: $2\sqrt{2+x} - 2\arctan\sqrt{2+x}$

1 c.

$$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x + 2\sin x + 5}dx = \left/ \begin{array}{c} t = \sin x \\ \frac{dt}{dx} = \cos x \end{array} \right/ =$$

$$= \int \frac{dt}{t^2+2t+5} = \int \frac{1}{(t+1)^2+4}dt =$$

$$= \int \frac{1}{4\left(\left(\frac{t+1}{2}\right)^2+1\right)}dt = \left/ \begin{array}{c} u = \frac{t+1}{2} \\ \frac{du}{dt} = \frac{1}{2} \end{array} \right/ =$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{u^2+1} 2\,du = \frac{1}{2}\arctan u + C$$

Svar: $\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\sin x + 1}{2}\right)$

2. $y' + \frac{1}{x(x-1)}\, y = \frac{x^2}{(x-1)e^{2x}}$

$$i.f = e^{\int \frac{1}{x(x-1)}dx} \underset{\text{PBU}}{=} e^{\int\left(\frac{-1}{x} + \frac{1}{x-1}\right)dx} =$$

$$= e^{\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|} = \frac{x-1}{x}, \quad x > 1$$

mult. med i.f.

$$y' \frac{x-1}{x} + \frac{1}{x^2}\, y = \frac{x}{e^{2x}}$$

$$\left(y \cdot \frac{x-1}{x}\right)' = x e^{-2x}$$

$$y\,\frac{x-1}{x} = \int \underset{\downarrow}{x}\, \underset{\uparrow}{e^{-2x}}\,dx \underset{\text{p.i.}}{=} \frac{e^{-2x}}{-2}x - \int \frac{e^{-2x}}{-2}dx =$$

$$= -\frac{x}{2}e^{-2x} - \frac{e^{-2x}}{4} + C$$

$$\underset{\to 1}{y} = \underset{\to 1}{\frac{x}{x-1}}\Bigg(-\underset{\to 0}{\frac{x}{2e^{2x}}} - \underset{\to 0}{\frac{1}{4e^{2x}}} + C\Bigg)$$

då $x \to \infty$ ger $C = 1$

Svar: $y = \frac{x}{x-1}\left(-\frac{x}{2e^{2x}} - \frac{1}{4e^{2x}} + 1\right)$

3. $y'' + 2y' - 3y = e^{-3x}$

I. Sök y_h. K.E. $r^2 + 2r - 3 = 0$

$r_1 = 1 \quad r_2 = -3$

$$y_h = Ce^{x} + De^{-3x}$$

II. Sök y_p. Sub. $y = ze^{-3x}$, $z = z(x)$

$$y' = z'e^{-3x} + ze^{-3x}(-3) = (z' - 3z)e^{-3x}$$

$$y'' = \ldots = (z'' - 6z' + 9z)e^{-3x}$$

insättning och förkortning ger

$$z'' - 6z' + 9z + 2(z' - 3z) - 3z = 1$$

$$z'' - 4z' = 1, \quad z_p = ax$$

$$z_p' = a, \quad z_p'' = 0$$

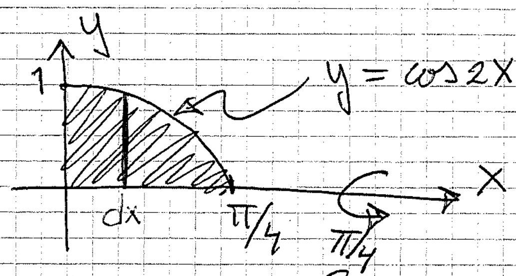
$$-4a = 1 \iff a = -\frac{1}{4}$$

$$y_p = -\frac{1}{4}xe^{-3x}$$

$y = y_h + y_p$.

Svar: $y = Ce^{x} + De^{-3x} - \frac{1}{4}xe^{-3x}$

4. $y = \cos 2x \ , \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{4}$



$dV = \pi y^2 dx$

$$V = \int_0^{\pi/4} \pi y^2 dx = \pi \int_0^{\pi/4} \cos^2 2x \, dx =$$

$$= \pi \int_0^{\pi/4} \frac{1+\cos 4x}{2} dx =$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[x + \frac{\sin 4x}{4} \right]_0^{\pi/4} =$$

$$= \frac{\pi}{2} \left(\frac{\pi}{4} + \underbrace{\frac{\sin \pi}{4}}_{=0} - \left(0 + \underbrace{\frac{\sin 0}{4}}_{=0}\right)\right) = \frac{\pi^2}{8}.$$

Svar: $\frac{\pi^2}{8}$ v.e.

---

5. a. $$\lim_{x \to 0} \frac{x + \cos 2x - e^x}{\sin(3x^2)} =$$

$=$ / Maclaurinutv.
$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \ldots$
$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + O(t^4)$ / $=$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x + 1 - \frac{(2x)^2}{2} + O(x^4) - \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + O(x^3)\right)}{3x^2 + O(x^6)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{5}{2}x^2 + O(x^3)}{3x^2 + O(x^6)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x^2}\left(-\frac{5}{2} + \overbrace{O(x)}^{\to 0}\right)}{\cancel{x^2}\left(3 + \underbrace{O(x^4)}_{\to 0}\right)} = -\frac{5}{6}$$

Svar: $-\frac{5}{6}$.

5b. $\lim_{x\to 2} \frac{\ln(2x-3)}{\sin(x-2)} = \left/ \begin{matrix} \text{typ } [\frac{0}{0}] \\ t = x-2 \\ x\to 2 \Rightarrow t\to 0 \end{matrix} \right/ =$

$= \lim_{t\to 0} \frac{\ln(2(t+2)-3)}{\sin t} =$

$= \lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+2t)}{\sin t} = \left/ \begin{matrix} \text{Maclaurin} \\ \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \\ x = 2t. \end{matrix} \right/$

$= \lim_{t\to 0} \frac{2t + O(t^2)}{t + O(t^3)} =$

$\lim_{t\to 0} \frac{\cancel{t}(2 + \overbrace{O(t)}^{\to 0})}{\cancel{t}(1 + \underbrace{O(t^2)}_{\to 0})} = 2$

Svar: $\lim_{x\to 2} \frac{\ln(2x-3)}{\sin(x-2)} = 2$

5c. $\int_2^\infty \frac{1}{x^2-1}\,dx$ konv. ∞ jfr med $\int_2^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ $(\alpha = 2 > 1.)$.

Bilda $\int_2^\omega \frac{1}{x^2-1}\,dx$ låt sedan $\omega\to\infty$.

$\int_2^\omega \frac{1}{x^2-1}\,dx = \int_2^\omega \frac{1}{(x+1)(x-1)}\,dx =$ PBU.

$= \int_2^\omega \left(\frac{-\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{\frac{1}{2}}{x-1}\right) dx =$

$= \frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right]_2^\omega = \frac{1}{2}\left(\ln\frac{\omega-1}{\omega+1} - \ln\frac{1}{3}\right) =$

$= \frac{1}{2}\left(\underbrace{\ln \frac{\cancel{\omega}(1-\overbrace{\frac{1}{\omega}}^{\to 0})}{\cancel{\omega}(1+\underbrace{\frac{1}{\omega}}_{\to 0})}}_{\to \ln 1 = 0 \text{ då } \omega\to\infty} + \ln 3\right) \to \frac{\ln 3}{2}.$

Svar: $\int_2^\infty \frac{dx}{x^2-1} = \frac{\ln 3}{2}$

6. $f(x) = \ln(\cos x) + \frac{x^2}{2} = $ /Maclaurin/.

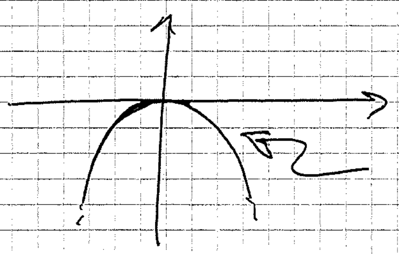
$$= \ln\Big(1 + \underbrace{\Big(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + O(x^6)\Big)}_{=t}\Big) + \frac{x^2}{2} =$$

$t \to 0$ då $x \to 0$.

$$= \cancel{-\frac{x^2}{2}} + \frac{x^4}{24} - \frac{1}{2}\Big(-\frac{x^2}{2}\Big)^2 + O(x^6) + \cancel{\frac{x^2}{2}} =$$

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \dots$$

$$= -\frac{1}{12}x^4 + O(x^6) \approx -\frac{1}{12}x^4 \text{ för } x \text{ nära } 0.$$

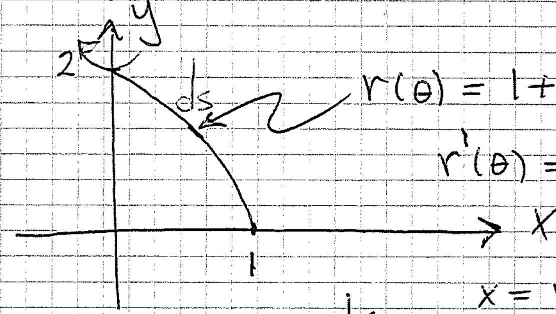


$P_4(x) = -\frac{1}{12}x^4$

$\approx f(x)$ för x nära 0.

Svar: f har lokalt maximum i $x = 0$

7.



$r(\theta) = 1 + \sin\theta$

$r'(\theta) = \cos\theta$

p.k. $x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$.

$$ds = \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\theta.$$

$$\text{Rotationsarean} = \int 2\pi x\, ds =$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi/2} r\cos\theta \sqrt{(1+\sin\theta)^2 + \cos^2\theta}\, d\theta =$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi/2} (1+\sin\theta)\cos\theta \sqrt{2 + 2\sin\theta}\, d\theta =$$

$$= 2\sqrt{2}\pi \int_0^{\pi/2} (1+\sin\theta)^{3/2} \cos\theta\, d\theta =$$

$$= 2\sqrt{2}\pi \left[\frac{(1+\sin\theta)^{5/2}}{\frac{5}{2}}\right]_0^{\pi/2} = \text{Svar:}$$

$$= 2\sqrt{2}\pi\Big(\frac{2}{5}\big(4\sqrt{2} - 1\big)\Big) = \underline{\underline{\frac{4\sqrt{2}\pi}{5}\big(4\sqrt{2}-1\big) \text{ a.e.}}}$$