Linköpings universitet
Magnus Berggren, MAI

Tentamen i Analys i en variabel del 2, utbildningskod TAIU10, modul TEN2. 2021-03-15, kl 14.00 – 19.00

Penna,radergummi,linjal,passare och gradskiva får användas. Formelsamlingar och andra hjälpmedel är ej tillåtna. Lösningarna skall vara fullständiga,välmotiverade,ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Uppgifterna bedöms med 0 – 3 poäng. För betyg n ($n = 3, 4$ eller 5) krävs minst $4(n\text{-}1)$ poäng. Godkänd dugga 3 ger 1-2 bonuspoäng. Observera att bonus enbart gäller för betyget 3. Skriv på omslaget hur många bonuspoäng (B=0,B=1 eller B=2) du har.

---

1) Beräkna

$$\text{a)} \int (2x+3)e^{3x}dx \qquad \text{b)} \int \frac{x}{x^2+4}dx \qquad \text{c)} \int \frac{\cos x}{\sin^2 x + 2\sin x}\,dx$$

2) Bestäm den lösning till differentialekvationen $y' + y = \frac{1}{e^x+1}$ som går genom punkten $(0,0)$.

3) Beräkna

$$\text{a)} \lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)-2x}{x^3} \qquad \text{b)} \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{1-\cos x} \qquad \text{c)} \lim_{x\to 1}(2x-1)^{\frac{1}{x-1}}$$

4) Lös differentialekvationen $y'' - 2y' - 15y = e^{-3x}$ under begynnelsevillkoren $y(0) = y'(0) = 0$.

5) Beräkna volymen av den kropp som uppkommer då området

$$D = \{(x,y)\colon 0 \le x \le \tfrac{\pi}{2},\ 0 \le y \le \sin(2x)\}$$

roteras ett varv kring y-axeln.

6) Beräkna arean av området som ligger mellan x-axeln, y-axeln och kurvan

$$y = \frac{1}{x^2+3x+2}, \qquad x \ge 0\,.$$

7) Beräkna längden av kurvan $y = \sqrt{x}\left(1 - \frac{x}{3}\right)$, $0 \le x \le 3$.

Kortfattade lösningsförslag till tentamen i Analys i en variabel, del2

2021-03-15.

1a. $\int (2x+3)e^{3x}\,dx =$ p.i.

$\frac{e^{3x}}{3}(2x+3) - \int \frac{e^{3x}}{3}2\,dx =$

$e^{3x}\left(\frac{2}{3}x+1\right) - \frac{2e^{3x}}{9} + C =$

$e^{3x}\left(\frac{2}{3}x+\frac{7}{9}\right) + C$

1b. $\int \frac{x}{x^2+4}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+4}\,dx =$

$\frac{1}{2}\ln(x^2+4) + C$

1c. $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x + 2\sin x}\,dx = \left| \begin{array}{l} t=\sin x \\ \frac{dt}{dx}=\cos x \\ dt=\cos x\,dx \end{array} \right| =$

$\int \frac{dt}{t^2+2t} = \int \frac{1}{t(t+2)}\,dt =$ PBU.

$\int \left(\frac{A}{t} + \frac{B}{t+2}\right) dt = \left| \begin{array}{l} \text{PBU ger} \\ A=1/2 \\ B=-1/2 \end{array} \right|$

$= \frac{1}{2}\left(\ln|t| - \ln|t+2|\right) + C =$

$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x}{\sin x+2}\right| + C$

2. $y' + y = \frac{1}{e^x+1}$

$\left| \begin{array}{ll} i.f = e^{G(x)} = e^x & \\ g(x)=1 \quad G(x)=x & \end{array} \right|$ mult. med i.f.

$$\underbrace{y'e^x + e^x y}_{=(ye^x)'} = \frac{e^x}{e^x+1}$$

$$ye^x = \int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx = \ln(e^x+1) + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)|$$

$$y = \frac{\ln(e^x+1)}{e^x} + \frac{C}{e^x}$$

$y(0) = 0$ ger $0 = \ln 2 + C$

$$\Rightarrow C = -\ln 2.$$

Svar: $$y = \frac{\ln(e^x+1) - \ln 2}{e^x}$$

---

3 a. $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x) - 2x}{x^3} = \Bigg/ \begin{array}{l} \text{Maclaurin.} \\ \sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \\ t = 2x \end{array} \Bigg/$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{2x} - \frac{(2x)^3}{3!} + O(x^5) - \cancel{2x}}{x^3} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^3}\left(-\frac{4}{3} + \overset{\to 0}{O(x^2)}\right)}{\cancel{x^3}} = -\frac{4}{3}$$

---

3 b. $$\frac{\ln(1+x^2)}{1-\cos x} = \Bigg/ \begin{array}{l} \ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \dots \\ t = x^2 \\ \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + O(x^4) \end{array} \Bigg/$$

$$= \frac{x^2 + O(x^4)}{1 - \left(1 - \frac{x^2}{2!} + O(x^4)\right)} =$$

$$\frac{\cancel{x^2}\left(1 + \overset{\to 0}{O(x^2)}\right)}{\cancel{x^2}\left(\frac{1}{2} + \underset{\to 0}{O(x^2)}\right)} \longrightarrow 2 \quad då\ x \to 0$$

Svar: Gr.v $= 2$.

3c. $\lim_{x\to 1} (2x-1)^{\frac{1}{x-1}} = \left/ \begin{array}{l} t = x-1 \\ x = 1+t \\ x\to 1 \Rightarrow t\to 0 \end{array} \right)$

$= \lim_{t\to 0} \left(2(1+t)-1\right)^{\frac{1}{t}} = \lim_{t\to 0} (1+2t)^{\frac{1}{t}} =$

$\lim_{t\to 0} e^{\frac{1}{t}\ln(1+2t)} = \left/ \begin{array}{l} \text{maclaurin.} \\ \ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} - \ldots \end{array} \right.$

$= \lim_{t\to 0} e^{\frac{1}{t}\left(2t + \mathcal{O}(t^2)\right)} =$

$\lim_{t\to 0} e^{\left(2 + \overset{\to 0}{\mathcal{O}(t)}\right)} = e^2$

Svar: e^2

---

4. $y'' - 2y' - 15y = e^{-3x}$

I. Sök y_h.

K.E. $r^2 - 2r - 15 = 0$

$(r-1)^2 - 16 = 0$

$r = 1 \pm 4 = \begin{cases} -3 \\ 5 \end{cases}$.

$y_h = Ce^{-3x} + De^{5x}$

II. Sök y_p.

Sub $y = ze^{-3x}$, där $z = z(x)$.

$y' = z'e^{-3x} + z(-3)e^{-3x} = (z' - 3z)e^{-3x}$

$y'' = \ldots = (z'' - 6z' + 9z)e^{-3x}$

insättning och förkortning av e^{-3x} ger

$z'' - 6z' + 9z - 2(z' - 3z) - 15z = 1$

$z'' - 8z' = 1$ Ansats. $z_p = ax$

$z_p' = a \quad , \quad z_p'' = 0$ insättning ger

$-8a = 1 \Rightarrow a = -\frac{1}{8}$

$z_p = -\frac{1}{8}x \quad , \quad y_p = -\frac{1}{8}xe^{-3x}$

$y = y_h + y_p = Ce^{-3x} + De^{5x} - \frac{1}{8}xe^{-3x}$

$y' = -3Ce^{-3x} + 5De^{5x} - \frac{1}{8}e^{-3x} + \frac{3}{8}xe^{-3x}$

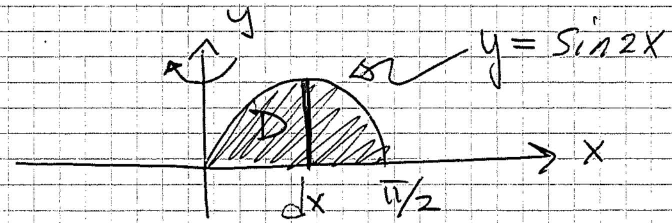
$y(0) = 0$ ger $C + D = 0$

$y'(0) = 0$ ger $-3C + 5D - \frac{1}{8} = 0$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} C = -D \\ 8D = \frac{1}{8} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} C = \frac{-1}{64} \\ D = \frac{1}{64} \end{cases}$

Svar: $y = -\frac{1}{64}e^{-3x} + \frac{1}{64}e^{5x} - \frac{1}{8}xe^{-3x}$

5.



Skalformeln:

$V = \int_0^{\pi/2} 2\pi x y \, dx = 2\pi \int_0^{\pi/2} x \sin 2x \, dx =$ p.i

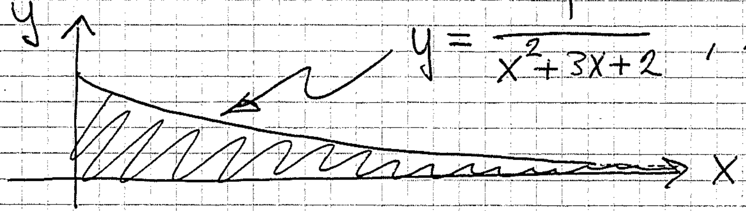
$2\pi \left(\left[\frac{-\cos 2x}{2} x \right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \frac{-\cos 2x}{2} \cdot 1 \, dx \right)$

$= \pi \cdot \frac{\pi}{2} + \pi \int_0^{\pi/2} \cos 2x \, dx =$

$\frac{\pi^2}{2} + \pi \underbrace{\left[\frac{\sin 2x}{2} \right]_0^{\pi/2}}_{=0} = \frac{\pi^2}{2}$

Svar: $V = \pi^2/2$ v.e.

6. $y = \dfrac{1}{x^2+3x+2}$, $x \geq 0$.



$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+3x+2}\,dx = ?$$

Bilda. $\displaystyle\int_0^{\omega} \frac{1}{x^2+3x+2}\,dx =$

låt sedan $\omega \to \infty$.

$$\int_0^{\omega} \frac{1}{(x+1)(x+2)}\,dx \underset{\text{PBU}}{=} \int_0^{\omega} \left(\frac{1}{x+1} + \frac{-1}{x+2}\right) dx$$

$$= \left[\ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right|\right]_0^{\omega} = \ln\left(\frac{\cancel{\omega}(1+\overbrace{\tfrac{1}{\omega}}^{\to 0})}{\cancel{\omega}(1+\underbrace{\tfrac{2}{\omega}}_{\to 0})}\right) - \ln\frac{1}{2}$$

$\longrightarrow \underbrace{\ln 1}_{=0} - \ln 2^{-1} = \ln 2$ då $\omega \to \infty$

Svar: Arean $= \ln 2$ a.e.

7. $y = \sqrt{x}\left(1 - \dfrac{x}{3}\right)$, $0 \leq x \leq 3$

$$L = \int \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_0^3 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

$$= \Bigg/ \begin{array}{l} y = \sqrt{x} - \dfrac{x^{3/2}}{3} \\ y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{2}\sqrt{x} \end{array} \Bigg/ =$$

$$\int_0^3 \sqrt{1 + \left(\frac{1-x}{2\sqrt{x}}\right)^2}\,dx = \int_0^3 \sqrt{\frac{4x + x^2 - 2x + 1}{4x}}\,dx$$

$$= \int_0^3 \sqrt{\frac{(x+1)^2}{4x}}\,dx = \int_0^3 \frac{x+1}{2\sqrt{x}}\,dx =$$

$$\int_0^3 \left(\frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) dx = \left[\frac{x^{3/2}}{3} + \sqrt{x}\right]_0^3 =$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3} - 0 = 2\sqrt{3} \text{ l.e.}$$