Linköpings universitet
Magnus Berggren, MAI

Tentamen i Analys i en variabel del 2, utbildningskod TAIU10, modul TEN2. 2021-08-21 , kl 8.00 – 13.00

Penna,radergummi,linjal,passare och gradskiva får användas. Formelsamlingar och andra hjälpmedel är ej tillåtna. Lösningarna skall vara fullständiga,välmotiverade,ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Uppgifterna bedöms med 0 – 3 poäng. För betyg n ($n = 3, 4$ eller 5) krävs minst $4(n-1)$ poäng. Godkänd dugga 3 ger 1-2 bonuspoäng. Observera att bonus enbart gäller för betyget 3. Skriv på omslaget hur många bonuspoäng (B=0,B=1 eller B=2) du har.

---

1. Beräkna följande integraler

   a) $\int_0^4 x\sqrt{9+x^2}dx$ (1p) b) $\int x\sin(3x)\ dx$ (1p) c) $\int \frac{1}{x^3-x}dx$ (1p)

2. Bestäm den lösning till differentialekvationen $xy' + 2y = \frac{x}{x-1}$, $x > 1$, som uppfyller villkoret $y(2) = 1$

3. Bestäm volymen av den kropp som uppstår då området $0 \le y \le \sqrt{x}\, e^{-2x}$, $x \ge 0$, roteras ett varv kring x-axeln.

4. Lös differentialekvationen $y''(x) - 2y'(x) - 3y(x) = 9xe^{2x}$ under begynnelsevillkoren $y(0) = y'(0) = 0$.

5. a) Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2+x^4}-1-x^2}{\cos(2x^2)-1}.$$

   b) Bestäm konstanten a så att gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\ln(1+x)+\sin x + ax^2 - 3x}{x^3}$$

   existerar ändligt. Bestäm också detta gränsvärde. (2p)

6. Bestäm konstanten a så att derivatan av ordning 9 av $f(x) = x^3(ae^{x^2} - \cos x^3)$ för $x = 0$ ska vara lika med 0.

7. En kurva $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t$, $0 \le t \le \pi$, roteras ett varv kring x-axeln. Hur stor area får den yta som uppkommer vid rotation?

Kortfattade lösningsförslag.

1 a. $\displaystyle\int_0^4 x\sqrt{9+x^2}\,dx = \left/\begin{array}{c}\text{Sub}\\ t=9+x^2\\ dt=2x\,dx\\ \text{byt gränser}\end{array}\right/ =$

$\displaystyle\int_9^{25}\frac{1}{2}\sqrt{t}\,dt = \left[\frac{1}{3}t^{3/2}\right]_9^{25} = \frac{1}{3}(125-27)$

$= \dfrac{98}{3}$.

1 b. $\displaystyle\int \underset{\downarrow}{x}\,\underset{\uparrow}{\sin 3x}\,dx \underset{\text{p.i}}{=}$

$= \dfrac{-\cos 3x}{3}\cdot x - \displaystyle\int \frac{-\cos 3x}{3}\cdot 1\,dx =$

$= -\dfrac{x}{3}\cos 3x + \dfrac{\sin 3x}{9} + C$.

1 c. $\displaystyle\int \frac{1}{x^3-x}\,dx = \int \frac{1}{x(x-1)(x+1)}\,dx =$

PBU

$= \displaystyle\int\left(\frac{-1}{x} + \frac{1/2}{x-1} + \frac{1/2}{x+1}\right)dx = \frac{1}{2}\ln|x^2-1| - \ln|x| + C$

2. $\begin{cases} xy' + 2y = \dfrac{x}{x-1}, & x>1 \\ y(2) = 1 \end{cases}$

L: $y' + \frac{2}{x}y = \frac{1}{x-1}$, $x>1$.

$/ \; i.f = e^{2\ln x} = x^2 \; /$ mult. med i.f.

$y'x^2 + 2xy = \dfrac{x^2}{x-1}$

$(yx^2)' = \dfrac{x^2}{x-1}$ polynomdiv.

$yx^2 = \displaystyle\int \frac{x(x-1)+(x-1)+1}{x-1}\,dx = \int\left(x+1+\frac{1}{x-1}\right)$

$yx^2 = \dfrac{x^2}{2} + x + \ln(x-1) + C$

$y = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{x} + \dfrac{\ln(x-1)}{x^2} + \dfrac{C}{x^2}$

$y(2)=1$ ger $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{\ln 1}{4}}_{=0} + \frac{C}{4}$

$\Rightarrow C = 0$

Svar: $y = 1/2 + 1/x + \dfrac{\ln(x-1)}{x^2}$

3. 

$y=\sqrt{x}\,e^{-2x}, \quad x \geq 0$

$$V = \int_0^\infty \pi y^2 \, dx = \pi \int_0^\infty x e^{-4x} \, dx$$

Skivformeln.

$$\int_0^\omega x e^{-4x} \, dx \underset{p.i}{=} \left[\frac{e^{-4x}}{-4} x \right]_0^\omega - \int_0^\omega \frac{e^{-4x}}{-4} \, dx =$$

$$= \frac{\omega}{-4e^{4\omega}} + \frac{1}{4} \left[\frac{e^{-4x}}{-4} \right]_0^\omega =$$

$$\underbrace{\frac{\omega}{-4e^{4\omega}}}_{\to 0 \text{ enligt standardgr.v.}} - \frac{1}{16} \underbrace{\frac{1}{e^{4\omega}}}_{\to 0} + \frac{1}{16} \to \frac{1}{16} \quad \text{då } \omega \to \infty.$$

Svar: Volymen $= \frac{\pi}{16}$ v.e.

4. $\begin{cases} y'' - 2y' - 3y = 9xe^{2x} \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$

K.E. $r^2 - 2r - 3 = 0$

$(r+1)(r-3) = 0 \iff \begin{cases} r_1 = -1 \\ r_2 = 3 \end{cases}$

$y_h = Ce^{-x} + De^{3x}$

Sök y_p. Sub. $y = ze^{2x}$, $z = z(x)$.

$y' = z'e^{2x} + z2e^{2x} = (z' + 2z)e^{2x}$

$y'' = \dots = (z'' + 4z' + 4z)e^{2x}$

insättning och förkortning av e^{2x} ger

$z'' + 4z' + 4z - 2(z' + 2z) - 3z = 9x$

$z'' + 2z' - 3z = 9x$

Ansats: $z_p = ax + b$.

$z_p' = a$, $z_p'' = 0$

ger $2a - 3(ax + b) = 9x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3a = 9 \\ 2a - 3b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = -2 \end{cases}$$

$$z_p = -3x - 2$$

$$y_p = (-3x-2)e^{2x}$$

$$y = y_h + y_p = Ce^{-x} + De^{3x} - (3x+2)e^{2x}$$

$$y' = -Ce^{-x} + 3De^{3x} - \left(3e^{2x} + (3x+2)e^{2x} \cdot 2\right)$$

$y(0) = 0$ ger $C + D - 2 = 0$

$y'(0) = 0$ ger $-C + 3D - 7 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4D = 9 \\ C = 2 - D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D = \frac{9}{4} \\ C = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Svar: $y = -\frac{1}{4}e^{-x} + \frac{9}{4}e^{3x} - (3x+2)e^{2x}$

5 a. $$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2+x^4}-1-x^2}{\cos(2x^2)-1} =$$

Maclaurinutv.

$$e^t = 1+t+\frac{t^2}{2!}+O(t^3)$$

$t = x^2+x^4$ cost. p.s.s. =

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+(x^2+x^4)+\frac{x^4}{2}+O(x^6)-1-x^2}{1-\frac{4x^4}{2!}+O(x^8)-1} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{3}{2}x^4+O(x^6)}{-2x^4+O(x^8)} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^4}\left(\frac{3}{2}+\underbrace{O(x^2)}_{\to 0}\right)}{\cancel{x^4}\left(-2+\underbrace{O(x^4)}_{\to 0}\right)} = -\frac{3}{4}$$

Svar: Gr.v $= -\frac{3}{4}$

5 b. $\lim_{x\to 0} \dfrac{2\ln(1+x)+\sin x + ax^2 - 3x}{x^3} =$

$\lim_{x\to 0} \dfrac{2\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+O(x^4)\right)+x-\frac{x^3}{3!}+O(x^5)+ax^2-3x}{x^3} =$

$\lim_{x\to 0} \dfrac{(a-1)x^2+\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\right)x^3+O(x^4)}{x^3} =$

$\lim_{x\to 0} \left(\underbrace{\frac{a-1}{x}}_{\to \pm\infty} + \frac{1}{2} + \overbrace{O(x)}^{\to 0} \right)$

$\to \pm\infty$ då $x \to 0$ om inte a väljs till 1.

$a=1$ ger Gr.v $= \frac{1}{2}$.

Svar: $\begin{cases} a = 1 \\ \text{Gr.v} = 1/2 \end{cases}$

6. $f(x) = x^3(ae^{x^2} - \cos x^3)$

Maclaurinutv.

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \ldots\ldots \frac{f^{(9)}(0)}{9!}x^9 + \ldots\ldots$$

$$\ldots \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \mathcal{O}(x^{n+1}).$$

$f^{(9)}(0) = 0 \iff$ koeff. framför $x^9 = 0$.

$$f(x) = x^3(ae^{x^2} - \cos x^3) = \left/ \begin{array}{l} e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \ldots \\ t = x^2 \\ \cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \ldots \\ t = x^3 \end{array} \right/$$

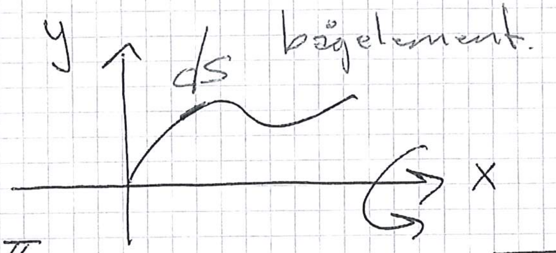
$$= x^3\left(a\left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \mathcal{O}(x^8)\right) - \left(1 - \frac{x^6}{2} + \mathcal{O}(x^{12})\right)\right)$$

$$= x^3\left(a - 1 + ax^2 + \frac{a}{2}x^4 + \left(\frac{1}{2} + \frac{a}{6}\right)x^6 + \mathcal{O}(x^8)\right)$$

Välj $a = -3$ så blir koeff. framför $x^9 = 0$.

Svar: $a = -3$.

7.



$$A = \int_0^{\pi} 2\pi y \, ds = \Big/ \; ds = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt$$

$$x'(t) = 1 - \cos t$$

$$y'(t) = \sin t \; \Big/$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi} (1-\cos t)\sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t}\, dt$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi} (1-\cos t)\sqrt{2 - 2\cos t}\, dt =$$

$$2\sqrt{2}\,\pi \int_0^{\pi} \left(2\sin^2 \frac{t}{2}\right)^{3/2} dt = 8\pi \int_0^{\pi} \sin^3 \frac{t}{2}\, dt$$

$$= 8\pi \int_0^{\pi} \left(1 - \cos^2 \frac{t}{2}\right) \sin \frac{t}{2}\, dt = \Big/ \; u = \cos \frac{t}{2}, \quad 2du = -\sin \frac{t}{2}\, dt \; \Big/$$

$$= 2\cdot 8\pi \int_1^0 (-1)(1-u^2)\, du = 2\cdot 8\pi \left[u - \frac{u^3}{3}\right]_0^1 = \frac{32\pi}{3} \text{ a.e.}$$