Linköpings universitet
Magnus Berggren, MAI

Tentamen i Analys i en variabel del 2, utbildningskod TAIU10, modul TEN2. 2022-03-15 , kl 14.00 – 19.00

Penna,radergummi,linjal,passare och gradskiva får användas. Formelsamlingar och andra hjälpmedel är ej tillåtna. Lösningarna skall vara fullständiga,välmotiverade,ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Uppgifterna bedöms med 0 – 3 poäng. För betyg n ($n = 3, 4$ eller 5) krävs minst $4(n-1)$ poäng. Godkänd dugga 3 ger 1-2 bonuspoäng. Observera att bonus enbart gäller för betyget 3.
Skriv på omslaget hur många bonuspoäng (B=0,B=1 eller B=2) du har.

1. Beräkna

   a) $\int x\cos 2x\,dx$ b) $\int \frac{4x^2}{\sqrt{x^3+2}}dx$ c) $\int \frac{4}{x+x^2}dx$

2. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y''+2y'-8y=6e^{2x}$ som uppfyller villkoren $y(0)=y'(0)=0$

3. Bestäm konstanten a så att

   $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x+\ln(1+ax)}{x^2}$$

   existerar, samt bestäm gränsvärdet.

4. Hur stor volym har den kropp som uppkommer , då området som ligger mellan x-axeln , kurvan $y=\cos x+\sin x$, $\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{2}$ och linjerna $x=\frac{\pi}{4}$ och $x=\frac{\pi}{2}$ roterar ett varv kring x-axeln.

5. Finn den lösning till differentialekvationen $(1+x^2)y'+y=2$ som har gränsvärdet 3 då $x\to\infty$.

6. Låt $f(x)=x^2\sin(2x^2)$. Bestäm $f^{(60)}(0)$.

7. Betrakta kurvan som i polära koordinater ges av

   $$r=1+\cos\theta,\quad -\pi\le\theta\le\pi.$$

   Beräkna kurvans längd.

Kortfattade lösningsförslag till tentamen Analys del 2 TAIU10

2022-03-15

---

1. a. $\displaystyle\int x\cos 2x\,dx \underset{p.i}{=} \frac{\sin 2x}{2}x - \int \frac{\sin 2x}{2}dx$

$$= \frac{x}{2}\sin 2x + \frac{\cos 2x}{4} + C$$

b. $\displaystyle\int \frac{4x^2}{\sqrt{x^3+2}}dx = \left| \begin{array}{l} t = x^3+2 \\ \frac{dt}{dx} = 3x^2 \\ \frac{dt}{3} = x^2 dx \end{array} \right| =$

$$= \int \frac{\frac{4}{3}dt}{\sqrt{t}} = \frac{4}{3}\int t^{-1/2}dt = \frac{4}{3}\frac{t^{1/2}}{\frac{1}{2}} + C$$

$$= \frac{8}{3}\sqrt{x^3+2} + C$$

c. $\displaystyle\int \frac{4}{x+x^2}dx = \int \frac{4}{x(1+x)}dx \underset{\text{PBU}}{=}$

$$= \int\left(\frac{4}{x} + \frac{-4}{1+x}\right)dx = 4\ln\left|\frac{x}{1+x}\right| + C$$

2. $y'' + 2y' - 8y = 6e^{2x}$

I. Sök y_h. K.E. $r^2+2r-8=0$

$\Longleftrightarrow (r+1)^2 = 9 \Longleftrightarrow r = -1 \pm 3 = \begin{cases} 2 \\ -4 \end{cases}$

$$y_h = Ce^{2x} + De^{-4x}$$

II. Sök y_p. Sub. $y = ze^{2x}$

$$y' = z'e^{2x} + z2e^{2x} = (z'+2z)e^{2x}$$

$$y'' = (z''+2z')e^{2x} + (z'+2z)2e^{2x} =$$
$$(z''+4z'+4z)e^{2x}$$

insättning och förkortning av e^{2x} ger

$$z''+4z'+4z+2z'+4z-8z = 6$$

$$z''+6z' = 6$$

$$z_p = ax, \quad z_p' = a, \quad z_p'' = 0$$

$$6a = 6 \Longleftrightarrow a = 1$$

$$z_p = x, \quad y_p = xe^{2x}$$

$$y = y_h + y_p = Ce^{2x} + De^{-4x} + xe^{2x}$$

$$y' = 2Ce^{2x} - 4De^{-4x} + e^{2x} + 2xe^{2x}$$

$y(0) = y'(0) = 0$ ger

$$\begin{cases} C + D = 0 \\ 2C - 4D + 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} C = -1/6 \\ D = 1/6 \end{cases}$$

Svar: $y = -\frac{1}{6}e^{2x} + \frac{1}{6}e^{-4x} + xe^{2x}$

3.

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - \cos x + \ln(1 + ax)}{x^2} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 + x + \frac{x^2}{2!} + O(x^3) - \left(1 - \frac{x^2}{2!} + O(x^4)\right) + ax - \frac{(ax)^2}{2!}}{x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\underbrace{\frac{a+1}{x}}_{\to \pm\infty \text{ om } a \neq -1} + 1 - \frac{a^2}{2} + O(x) \right)$$

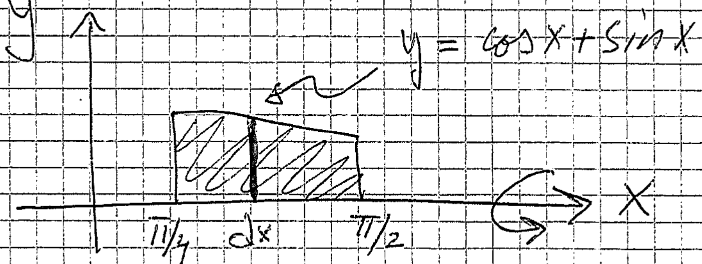
Gr.v exist $\iff a = -1$.

$a = -1$ ger

$$\lim_{x \to 0} \left(0 + 1 - \frac{(-1)^2}{2} + \underbrace{O(x)}_{\to 0} \right) = \frac{1}{2}$$

Svar: $\begin{cases} a = -1 \\ \text{Gr.v} = \frac{1}{2} \end{cases}$

4.



Skivformeln.

$$dV = \pi y^2 \, dx$$

$$V = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \pi (\cos x + \sin x)^2 \, dx =$$

$$\pi \int_{\pi/4}^{\pi/2} \Big(\underbrace{\cos^2 x + \sin^2 x}_{=1} + \underbrace{2 \sin x \cos x}_{= \sin 2x} \Big) \, dx =$$

$$\pi \left[x - \frac{\cos 2x}{2} \right]_{\pi/4}^{\pi/2} =$$

$$\pi \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \pi \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right)$$

Svar: $\frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi}{2}$ v.e.

5.

$$y' + \frac{1}{1+x^2} y = \frac{2}{1+x^2}$$

$$\Big/ \; i.f = e^{\arctan x} \; \Big/ \quad \text{mult. med i.f.}$$

$$\iff \quad y' e^{\arctan x} + \frac{1}{1+x^2} e^{\arctan x} y = \frac{2}{1+x^2} e^{\arctan x}$$

$$\iff \quad y e^{\arctan x} = \int \frac{2}{1+x^2} e^{\arctan x} \, dx$$

Sub: $t = \arctan x$. osv

$$\iff \quad y e^{\arctan x} = 2 e^{\arctan x} + C$$

$$y = 2 + C e^{-\overset{\longrightarrow \pi/2}{\arctan x}} \longrightarrow 2 + C e^{-\pi/2} = 3$$

då $x \to \infty$

ger $C = e^{\pi/2}$

Svar: $y = 2 + e^{\frac{\pi}{2} - \arctan x}$

6. Maclaurinutv.

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(60)}(0)}{60!}x^{60} + \ldots$$

$$f(x) = x^2 \sin(2x^2) = \left/ \begin{array}{l} \sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \ldots \\ t = 2x^2 \end{array} \right/$$

$$= x^2\left(2x^2 - \frac{(2x^2)^3}{3!} + \ldots + \frac{(2x^2)^{29}}{29!} - \ldots\right)$$

$(2x^2)^? = {}_n x^{58}$

$? = 29.$ $\quad 29 = 2m+1$

$m = 14.$

identifiering av koeff. framför x^{60} ger

$$\frac{f^{(60)}(0)}{60!} = \frac{2^{29}}{29!}$$

Svar: $f^{(60)}(0) = \dfrac{60! \cdot 2^{29}}{29!}$

7

$$L = \int \sqrt{dx^2 + dy^2} = \text{p.k.} = \text{Se boken} =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{(1+\cos\theta)^2 + (-\sin\theta)^2}\, d\theta$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{2 + 2\cos\theta}\, d\theta = \sqrt{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{1+\cos\theta}\, d\theta$$

$$= \sqrt{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{2\cos^2\frac{\theta}{2}}\, d\theta = 2\int_{-\pi}^{\pi} \left|\cos\frac{\theta}{2}\right| d\theta =$$

$$\left/ \begin{array}{l} \text{jämn. integrand} \\ \text{origosymmetriskt} \end{array} \right/ = 4\int_0^{\pi} \cos\frac{\theta}{2}\, d\theta =$$

$$4\left[\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{1}{2}}\right]_0^{\pi} = 8(1-0) = 8$$

Svar: 8 l.e