Linköpings universitet
Magnus Berggren, MAI

Tentamen i Analys i en variabel del 2, utbildningskod TAIU10, modul TEN2. 2022-08-20 , kl 8.00 – 13.00

Penna,radergummi,linjal,passare och gradskiva får användas. Formelsamlingar och andra hjälpmedel är ej tillåtna. Lösningarna skall vara fullständiga,välmotiverade,ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Uppgifterna bedöms med 0 – 3 poäng. För betyg n (n = 3, 4 eller 5) krävs minst 4(n-1) poäng. Godkänd dugga 3 ger 1-2 bonuspoäng. Observera att bonus enbart gäller för betyget 3. Skriv på omslaget hur många bonuspoäng (B=0,B=1 eller B=2) du har.

---

1) Bestäm en primitiv funktion till följande funktioner

a) xe^{2x} b) $\dfrac{\sin x}{\cos x}$ c) $\dfrac{4x}{x^2-2x-3}$

2) Bestäm alla lösningar till differentialekvationen $y''(x)-y'(x)-2y(x)=(2x-5)e^x$.

3) Räkna ut volymen av den rotationskropp som bildas då ytan mellan kurvan $y=\arctan x$, $0\le x\le 1$, x-axeln och linjen $x=1$ roteras ett varv kring y-axeln.

4) En ingenjör tentaläser och häller upp en kopp kaffe med temperaturen $90^\circ C$. Hon fastnar i ett intressant avsvalningsproblem. Efter 15 minuter har hon löst problemet och då håller kaffet temperaturen $40^\circ C$. Om temperaturen i rummet är konstant $20^\circ C$ så ges kaffets temperatur $y(t)$ av $y'(t)=-k(y(t)-20)$, $k>0$. Ange $y(t)$.

5) a) Bestäm maclaurinpolynomet av ordning 2 till $f(x)=e^{x^2}\sqrt{1+2x}$ (1p)

b) Bestäm konstanten a så att gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+ax-e^{x^2}\sqrt{1+2x}}{\sqrt{1+x^2}-1}$$

existerar ändligt. Bestäm också detta gränsvärde. (2p)

6) Hur lång är kurvan $\begin{cases} x(t)=t+\ln t \\ y(t)=t-\ln t \end{cases}$, $\dfrac{1}{2}\le t\le 2$?

7) Ett influensavirus kallat Sydney sprids i Sverige, med en folkmängd på 9 miljoner. Man vet att 3 miljoner av befolkningen är immuna mot detta virus. Antag att antalet insjuknade per vecka är proportionellt mot produkten av antalet friska och skillnaden mellan maximala antalet sjuka och antalet sjuka vid en viss tidpunkt. Om 1 miljon personer insjuknar på en vecka , hur många insjuknar då på 2 veckor? Vi förutsätter att alla är friska från början.

Kortfattade lösningsförslag till tentamen

TAIU10 / del 2 2022-08-20

1. a. $\int xe^{2x}\,dx \underset{p.i}{=} x\frac{e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2}\,dx =$

$\frac{xe^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + C$.

b. $\int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \left/ \begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x\,dx \end{array} \right/ =$

$\int \frac{(-1)}{t}\,dt = -\ln|t| + C = -\ln|\cos x| + C$

c. $\int \frac{4x}{x^2-2x-3}\,dx = \int \frac{4x}{(x+1)(x-3)}\,dx =$

$\int \left(\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3}\right)dx = \int \left(\frac{+1}{x+1} + \frac{3}{x-3}\right)dx$

$= \ln|x+1| + 3\ln|x-3| + C$

2. $y'' - y' - 2y = (2x-5)e^x$

1. Sök y_h $y'' - y' - 2y = 0$

K.E. $r^2 - r - 2 = 0$

$r_1 = -1 \quad r_2 = 2$

$y_h = Ce^{-x} + De^{2x}$

2. Sök y_p

Sub. $y = ze^x$

$y' = (z' + z)e^x$

$y'' = (z'' + 2z' + z)e^x$

$z'' + 2z' + z - (z' + z) - 2z = 2x - 5$

$z'' + z' - 2z = 2x - 5$

$z_p = ax + b, \quad z_p' = a, \quad z_p'' = 0$

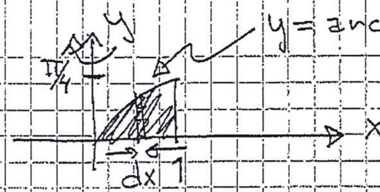
$a - 2(ax + b) = 2x - 5$

$\begin{cases} -2a = 2 \\ a - 2b = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases}$

$y_p = (-x + 2)e^x$

Svar: $y = y_h + y_p = Ce^{-x} + De^{2x} + (2-x)e^x$

3



$y = \arctan x \,, \; 0 \le x \le 1$

$\arctan 1 = \pi/4$

$$V = \int_0^1 2\pi x y \, dx = 2\pi \int_0^1 x \arctan x \, dx \underset{p.i}{=}$$

$$2\pi \left(\left[\frac{x^2}{2} \arctan x \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} \, dx \right) =$$

polynomdivision

$$2\pi \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx \right) =$$

$$2\pi \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \left[x - \arctan x \right]_0^1 \right) =$$

$$2\pi \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) \right) = 2\pi \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right) =$$

$$= \pi \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right)$$

Svar: $V = \pi \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right)$ v.e.

4.

$$y'(t) + k y(t) = 20k$$

$i.f = e^{kt}$. mult. med i.f

$$y'(t) e^{kt} + k e^{kt} y(t) = 20 k e^{kt}$$

$$\left(y(t) e^{kt} \right)' = 20 k e^{kt}$$

$$y(t) e^{kt} = \int 20 k e^{kt} \, dt$$

$$y(t) e^{kt} = 20 e^{kt} + C$$

$$y(t) = 20 + C e^{-kt}$$

$y(0) = 90$ ger $90 = 20 + C e^0$

$C = 70$.

$y(15) = 40$ ger $40 = 20 + 70 e^{-k \cdot 15}$

$$\ln \frac{2}{7} = -k \cdot 15$$

$$k = -\frac{1}{15} \ln\left(\frac{2}{7}\right) = \frac{1}{15} \ln\left(\frac{7}{2}\right)$$

Svar: $y(t) = 20 + 70 e^{-\frac{1}{15} \ln\left(\frac{7}{2}\right) t}$

5 a.

$$e^{t} = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots$$

$$(1+t)^{\alpha} = 1 + \alpha t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} t^2 + \dots$$

$$f(x) = e^{x^2}\sqrt{1+2x} = \left(1 + x^2 + O(x^4)\right)\left(1+2x\right)^{1/2} =$$

$$\left(1+x^2+O(x^4)\right)\left(1 + \tfrac{1}{2}2x + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}(2x)^2 + O(x^3)\right)$$

$$\left(1+x^2+O(x^4)\right)\left(1 + x - \frac{x^2}{2} + O(x^3)\right) =$$

$$1 + x - \frac{x^2}{2} + x^2 + O(x^3) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + O(x^3)$$

Svar: $P_2(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$

5 b.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 + ax - \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) + O(x^3)}{1 + \frac{1}{2}x^2 + O(x^4) - 1} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(a-1)x - \frac{x^2}{2} + O(x^3)}{\frac{1}{2}x^2 + O(x^4)} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\left((a-1) - \frac{x}{2} + O(x^2)\right)}{x^2\left(\frac{1}{2} + O(x^2)\right)} = \left/ \begin{array}{c}\text{Grv. exist ändligt} \\ \Longleftrightarrow \\ a=1\end{array} \right/ =$$

$\to \pm\infty$ om $a \neq 1$.

$$\underset{a=1}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{2} + O(x)}{\frac{1}{2} + O(x^2)} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = -1$$

6. Eftersom bågelementet, ds, ges av $ds = \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\,dt = \sqrt{2 + \frac{2}{t^2}}\,dt$ blir längden:

$$\begin{aligned}
\sqrt{2}\int_{\frac{1}{2}}^{2}\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}\,dt &= \sqrt{2}\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{\sqrt{t^2+1}}{t}\,dt = \{u = \sqrt{t^2+1}\} = \sqrt{2}\int_{\frac{\sqrt{5}}{2}}^{\sqrt{5}}\frac{u^2}{u^2-1}\,du \\
&= \sqrt{2}\int_{\frac{\sqrt{5}}{2}}^{\sqrt{5}} 1 + \frac{1}{u^2-1}\,du \\
&= \sqrt{2}\int_{\frac{\sqrt{5}}{2}}^{\sqrt{5}} 1 + \frac{1}{u^2-1}\,du = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_{\frac{\sqrt{5}}{2}}^{\sqrt{5}} 2 + \frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\,du \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\Big[2u + \ln|u-1| - \ln|u+1|\Big]_{\frac{\sqrt{5}}{2}}^{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{2} + \sqrt{2}\ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)
\end{aligned}$$

7. Om $y(t)$ är antalet insjuknade vid tiden t, så gäller att

$$y'(t) = k(9-y)(6-y),$$

där $0 \le y \le 6$. Modellen är en separabel differentialekvtion så att

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} &= k(9-y)(6-y) \Rightarrow \frac{dy}{(9-y)(6-y)} = k\,dx \Rightarrow \frac{1}{3}\int \frac{1}{6-y} - \frac{1}{9-y}\,dy = \int k\,dx \\
&\Rightarrow \frac{1}{3}\ln\frac{9-y}{6-y} = kx + C \Rightarrow y(t) = \frac{6De^{3kt} - 9}{De^{3kt} - 1},
\end{aligned}$$

där $D = e^{3C}$. Villkoret $y(0) = 0$ ger att $D = \frac{3}{2}$. Alltså är $y(t) = 18\frac{e^{3kt}-1}{3e^{3kt}-2}$.
Eftersom $y(1) = 1$ gäller att $k = \frac{1}{3}\ln\frac{16}{15}$. Lösningen ges alltså av

$$y(t) = 18\frac{\left(\frac{16}{15}\right)^t - 1}{3\left(\frac{16}{15}\right)^t - 2}.$$

Antalet insjukna efter 2 veckor är då

$$y(2) = 18\frac{\left(\frac{16}{15}\right)^2 - 1}{3\left(\frac{16}{15}\right)^2 - 2} = 18\frac{16^2 - 15^2}{3\cdot 16^2 - 2\cdot 15^2} = 18\frac{(16-15)(16+15)}{3\cdot(15+1)^2 - 2\cdot 15^2} = \frac{558}{318} = 1.7$$