Linköpings universitet
Magnus Berggren, MAI

Tentamen i Analys i en variabel del 2, utbildningskod TAIU10, modul TEN2. 2023-01-10 , kl 8.00 – 13.00

Penna,radergummi,linjal och passare får användas. Formelsamlingar och andra hjälpmedel är ej tillåtna. Lösningarna skall vara fullständiga,välmotiverade,ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Uppgifterna bedöms med 0 – 3 poäng. För betyg n ($n = 3, 4$ eller 5) krävs minst $4(n\text{-}1)$ poäng. Godkänd dugga 3 ger 1-2 bonuspoäng. Observera att bonus enbart gäller för betyget 3. Skriv på omslaget hur många bonuspoäng (B=0,B=1 eller B=2) du har.

---

1) Räkna ut volymen av den rotationskropp som bildas då ytan mellan kurvan $y = \sqrt{x}$, x-axeln och linjen $x = 1$ roterar ett varv kring y-axeln.

2) Beräkna

a) $\int (x+2)e^{3x}dx$ b) $\int \frac{1}{x^2+3x+2}dx$ c) $\int \frac{3x}{\sqrt{1+x^2}}dx$

3) Bestäm den lösning till differentialekvationen $y'' + y' - 6y = e^{3x}$ som har ett gränsvärde då $x \to -\infty$ och som antar värdet 2 då $x = 0$.

4) a) Bestäm Maclaurinpolynomet av ordning 3 till $f(x) = \sin(x + x^2)$ (1p)

b) Beräkna $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2\sin x}{6x^3}$ (2p)

5) Bestäm samtliga funktioner $y(x)$, definierade för $x > 0$, sådana att

$$y'(x) + \frac{2}{x}y(x) = \frac{\cos x}{x}.$$

6) Bestäm om möjligt $f(0)$ så att $f(x)$ blir kontinuerlig i $x = 0$ då

$$f(x) = \frac{xe^{x/2} + \ln(1-x)}{\arctan x - \sin x}$$

då $x \neq 0$ i en omgivning av 0.

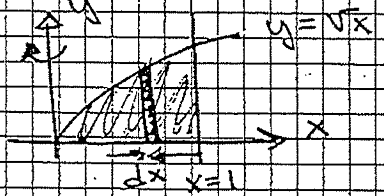
7) Visa att funktionen f, definierad för $x \geq 0$ genom $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+a}$, där a är en positiv konstant, antar sitt största värde då $x = a$. Visa sedan att volymen av den kropp som fås då området $0 \leq y \leq f(x), 0 \leq x \leq a$, roteras ett varv kring x-axeln är oberoende av värdet på konstanten a. Hur stor blir volymen ?

Kortfattade lösningsförslag till tentamen

Analys i en variabel del 2 TAIU10

2023-01-10 kl 8-13

1.



$$V = \int_0^1 2\pi x y \, dx \underset{\text{rörformeln}}{=}$$

$$= 2\pi \int_0^1 x\sqrt{x}\, dx = 2\pi \int_0^1 x^{3/2}\, dx = 2\pi \left[\frac{2}{5} x^{5/2} \right]_0^1 =$$

$$= 2\pi \left(\frac{2}{5} - 0 \right) = \frac{4\pi}{5}$$

Svar: $\frac{4\pi}{5}$ v.e

2.

a $\int (x+2)\cdot e^{3x}\, dx \underset{p.i}{=} \frac{e^{3x}}{3}(x+2) - \int \frac{e^{3x}}{3}\cdot 1\, dx =$

$$= \frac{e^{3x}}{3}(x+2) - \frac{e^{3x}}{9} + C$$

b $\int \frac{1}{x^2+3x+2}\, dx = \int \frac{1}{(x+1)(x+2)}\, dx =$

$$= \int \left(\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} \right) dx = \int \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx =$$

$$= \ln|x+1| - \ln|x+2| + C = \ln\left| \frac{x+1}{x+2} \right| + C$$

c. $\int \frac{3x}{\sqrt{1+x^2}}\, dx \underset{t=1+x^2}{=} \dots = 3\frac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}\cdot 2} + C = 3\sqrt{1+x^2} + C$

3. $y'' + y' - 6y = e^{3x}$

Sök y_h K.E. $r^2 + r - 6 = 0$

$(r-2)(r+3) = 0 \iff \begin{cases} r_1 = 2 \\ r_2 = -3 \end{cases}$

$$y_h = Ce^{2x} + De^{-3x}$$

Sök y_p $\quad y_p = ke^{3x}$

$y_p' = 3ke^{3x}$

$y_p'' = 9ke^{3x}$ insättning ger

$$9ke^{3x} + 3ke^{3x} - 6ke^{3x} = e^{3x}$$

$$9k + 3k - 6k = 1$$

$$6k = 1$$

$$k = 1/6 \qquad y_p = \frac{1}{6}e^{3x}$$

$$y = y_h + y_p = \underbrace{Ce^{2x}}_{\to 0} + \underbrace{De^{-3x}}_{\to +\infty} + \underbrace{\frac{1}{6}e^{3x}}_{\to 0}$$

då $x \to -\infty$

$\therefore D = 0$

$$y = Ce^{2x} + \frac{1}{6}e^{3x}$$

$y(0) = 2 \Rightarrow C + \frac{1}{6} = 2 \Rightarrow C = \frac{11}{6}$

Svar: $y = \frac{11}{6}e^{2x} + \frac{1}{6}e^{3x}$

4 a $\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \cdots$

$t = x + x^2$

$\sin(x+x^2) = x + x^2 - \frac{(x+x^2)^3}{3!} + \mathcal{O}(x^5)$

$= x + x^2 - \frac{x^3}{6} +$ termer av högre grad.

Svar: $P_3(x) = x + x^2 - \frac{x^3}{6}$

b. $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2\sin x}{6x^3} =$

$= \lim_{x \to 0} \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^4) - \left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) - 2\left(x - \frac{x^3}{6}\right)}{6x^3}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^3 + \mathcal{O}(x^4)}{6x^3} =$

$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{9} + \underbrace{\mathcal{O}(x)}_{\to 0} = \frac{1}{9}$

Svar: $\frac{1}{9}$

5. $y' + \frac{2}{x} y = \frac{\cos x}{x}, \quad x > 0$

$\left/ \; i.f = e^{G(x)} = e^{2\ln x} = x^2 \right.$

$g(x) = \frac{2}{x} \qquad G(x) = 2\ln x \big)$

$\Leftrightarrow \quad x^2 y' + 2xy = x\cos x$

$\Leftrightarrow \quad (yx^2)' = x\cos x$

$\Leftrightarrow \quad yx^2 = \int \underset{\downarrow}{x} \underset{\uparrow}{\cos x}\, dx = $ p.i

$= x\sin x - \int \sin x \, dx =$

$= x\sin x + \cos x + C$

Svar: $y = \frac{\sin x}{x} + \frac{\cos x}{x^2} + \frac{C}{x^2}$

6. f kont i $x = 0$

$\Leftrightarrow$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{xe^{\frac{x}{2}} + \ln(1-x)}{\arctan x - \sin x} = \Big/ \text{maclaurin} \Big/ =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2}\right) + \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) + O(x^4)}{x - \frac{x^3}{3} - \left(x - \frac{x^3}{3!}\right) + O(x^5)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{3}x^3 + O(x^4)}{-\frac{1}{6}x^3 + O(x^5)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{5}{24} + O(x)}{-\frac{1}{6} + O(x^2)} = \frac{5}{4}$$

Svar: $f(0) = \frac{5}{4}$ gör $f(x)$ kont. i $x = 0$.

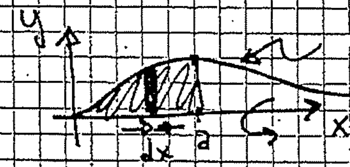
7. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x+a}$, $x \geq 0$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+a) - \sqrt{x} \cdot 1}{(x+a)^2} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{x + a - 2x}{(x+a)^2} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{a - x}{(x+a)^2}$$

x	0		a	
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$

f max då $x = a$.



$y = \dfrac{\sqrt{x}}{x+a}$

$$V = \int_0^a \pi y^2 \, dx = \pi \int_0^a \frac{x}{(x+a)^2} \, dx =$$

$$= \pi \int_0^a \left(\frac{1}{x+a} - \frac{a}{(x+a)^2} \right) dx =$$

$$= \pi \Big[\ln|x+a| + a \frac{1}{x+a} \Big]_0^a =$$

$$= \pi \left(\ln 2a + \frac{1}{2} - \ln a - 1 \right) = \pi \left(\ln 2 - \frac{1}{2} \right)$$

Svar: $V = \pi\left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right)$ v.e