Linköpings universitet
Magnus Berggren, MAI

Tentamen i Analys i en variabel del 2, utbildningskod TAIU10, modul TEN2. 2023-03-14 , kl 14.00 – 19.00

Penna,radergummi,linjal,och passare får användas. Formelsamlingar och andra hjälpmedel är ej tillåtna. Lösningarna skall vara fullständiga,välmotiverade,ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Uppgifterna bedöms med 0 – 3 poäng. För betyg n (n = 3, 4 eller 5) krävs minst 4(n-1) poäng. Godkänd dugga 3 ger 1-2 bonuspoäng. Observera att bonus enbart gäller för betyget 3. Skriv på omslaget hur många bonuspoäng (B=0,B=1 eller B=2) du har.

---

1. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y' + 2y = 12x + 6e^x$ som uppfyller begynnelsevillkoret $y(0) = 1$.

2. Beräkna följande primitiva funktioner

   (a) $\int x\sqrt{1+x}\,dx$ (b) $\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$ (c) $\int \frac{1}{x^2-3x+2}\,dx.$

3. Bestäm lösningen till differentialekvationen $y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 4xe^{3x}$ med villkoren $y(0) = 0$ och $y'(0) = 6$.

4. (a) Beräkna maclaurinpolynomet av grad 3 till $e^x - \cos x - \sin x$

   (b) Bestäm konstanterna a, b och c så att gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos x - \sin x + ax^2 + bx + c}{x^3}$$

   existerar. Bestäm också detta gränsvärde.

5. Beräkna dels med hjälp av skivformeln och dels med hjälp av rörformeln volymen av den kropp som uppkommer då området mellan x-axeln och kurvan $y = \ln x$, $1 \le x \le e$ roteras ett varv kring y-axeln.

6. Beräkna längden av kurvan $y = \sqrt{x}\left(1 - \frac{x}{3}\right)$, $0 \le x \le 3$.

7. Antag att funktionen f är kontinuerlig i intervallet $[a, b]$. Bestäm om möjligt konstanten A så att integralen

$$\int_a^b (f(x) - A)^2\,dx$$

   blir så liten som möjligt. Beräkna detta minimum då $f(x) = \sin x$ på $[0, \pi]$.

Kortfattade lösningsförslag till tentamen

Analys i en variabel, del 2 TAIU10

2023-03-14

1. $y' + 2y = 12x + 6e^{x}$

$i.f. = e^{\int 2\,dx} = e^{2x}$ mult. med i.f.

$y'e^{2x} + 2e^{2x}y = 12xe^{2x} + 6e^{3x}$

$(ye^{2x})' = 12xe^{2x} + 6e^{3x}$

$ye^{2x} = \int (12xe^{2x} + 6e^{3x})\,dx \underset{p.i.}{=} 6xe^{2x} - 3e^{2x} + 2e^{3x} + C$

$y = 6x - 3 + 2e^{x} + Ce^{-2x}$

$y(0) = 1$ ger $1 = -3 + 2 + C \Leftrightarrow C = 2$

Svar: $\underline{y(x) = 6x - 3 + 2e^{x} + 2e^{-2x}}$

2. a. $\int x\sqrt{1+x}\,dx \underset{p.i.}{=} x\dfrac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \int 1\cdot\dfrac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\,dx =$

$= \underline{\dfrac{2x}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}} - \dfrac{4}{15}(1+x)^{\frac{5}{2}} + C}$.

b. $\int \dfrac{e^{x}}{1+e^{x}}\,dx = \left/ \begin{matrix} t = 1+e^{x} \\ dt = e^{x}dx \end{matrix} \right/ = \int \dfrac{1}{t}\,dt = \underline{\ln|1+e^{x}| + C}$

c. $\int \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}\,dx = \int \dfrac{1}{(x-1)(x-2)}\,dx =$

$= \int \left(\dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x-2} \right) dx = \underline{\ln\left|\dfrac{x-2}{x-1}\right| + C}$

$A = -1$ $B = 1$

3. $y'' - 3y' + 2y = 4xe^{3x}$

K.E. $r^2 - 3r + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = 1 \\ r_2 = 2 \end{cases}$

$y_h = Ce^{x} + De^{2x}$

Sök y_p. Sub. $y = ze^{3x}$

$y' = (z' + 3z)e^{3x}$

$y'' = (z'' + 6z' + 9z)e^{3x}$

insätt. förkorta bort e^{3x}.

$z'' + 6z' + 9z - 3z' - 9z + 2z = 4x$

$z'' + 3z' + 2z = 4x$

$z_p = Ax + B$ $z_p' = A$ $z_p'' = 0$

$3A + 2Ax + 2B = 4x$

$\begin{cases} 2A = 4 \\ 3A + 2B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = -3 \end{cases}$

$y_p = (2x-3)e^{3x}$

$y = y_h + y_p = Ce^{x} + De^{2x} + (2x-3)e^{3x}$

$$y' = Ce^{x} + 2De^{2x} + 2e^{3x} + 3(2x-3)e^{3x}$$

$$y(0) = 0 \Rightarrow \quad C + D - 3 = 0 \quad \ldots(1)$$

$$y'(0) = 6 \Rightarrow \quad C + 2D + 2 - 9 = 6 \quad \ldots(2)$$

$$\begin{cases} C + D = 3 \\ C + 2D = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D = 10 \\ C = -7 \end{cases}$$

Svar: $\underline{y = -7e^{x} + 10e^{2x} + (2x-3)e^{3x}}$

4 a. $e^{x} - \cos x - \sin x =$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \left(1 - \frac{x^2}{2!}\right) - \left(x - \frac{x^3}{3!}\right) + x^4 B(x) =$$

$$= x^2 + \frac{x^3}{3} + x^4 B(x) \qquad B \text{ begränsad för } x \text{ nära } 0$$

Svar: $P_3(x) = x^2 + \frac{x^3}{3}$

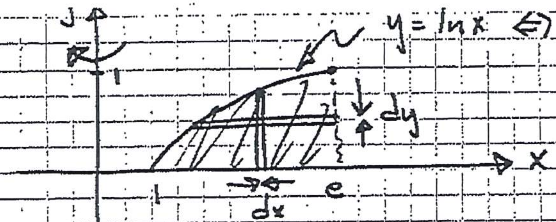
b. $$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + \frac{x^3}{3} + x^4 B(x) + ax^2 + bx + c}{x^3} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{c}{x^3} + \frac{b}{x^2} + \underbrace{\frac{a+1}{x}}_{\to \pm\infty} + \frac{1}{3} + \underbrace{xB(x)}_{\to 0} \right)$$

om inte $a = -1$.
osv.

Svar: Gränsvärdet existerar $\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$

Då är gränsvärdet $\underline{\frac{1}{3}}$.

5. 

$y = \ln x \Leftrightarrow x = e^{y}$

<u>Rörformeln</u>:

$$V = \int_1^e 2\pi x y \, dx = 2\pi \int_1^e x \ln x \, dx \underset{p.i}{=}$$

$$= 2\pi \left[\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} \right]_1^e =$$

$$= 2\pi \left(\frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} \right) = \underline{\pi \frac{e^2+1}{2}} \text{ v.e}$$

<u>Skivformeln</u>:

$$\text{Hålet} = \int_0^1 \pi x^2 \, dy = \pi \int_0^1 e^{2y} \, dy = \pi \left[\frac{e^{2y}}{2} \right]_0^1 = \pi \frac{e^2 - 1}{2}$$

$$V = \pi e^2 \cdot 1 - \pi \left(\frac{e^2 - 1}{2} \right) = \underline{\pi \frac{e^2 + 1}{2}} \text{ v.e.}$$

6. $$L = \int_0^3 \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_0^3 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \, dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} y = \sqrt{x} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{3} \\ y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2}\sqrt{x} \end{array} \right| = \int_0^3 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{2} \right)^2} \, dx =$$

forts →

$$= \int_0^3 \sqrt{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^2}\, dx = \int_0^3 \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{2}\right) dx =$$

$$= \left[\sqrt{x} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_0^3 = \sqrt{3} + \frac{3^{\frac{3}{2}}}{3} = \underline{\underline{2\sqrt{3}}}$$

Svar: $L = 2\sqrt{3}$ l.e.

[redacted]

7. $$g(A) = \int_a^b (f(x) - A)^2\, dx = \int_a^b \left(f^2(x) - 2f(x)A + A^2\right) dx =$$

$$= \int_a^b f^2(x)\, dx - 2A \int_a^b f(x)\, dx + A^2 (b-a)$$

$$g'(A) = -2 \int_a^b f(x)\, dx + 2A(b-a) = 0$$

$$A = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx$$

$g''(A) = 2(b-a) > 0 \quad \therefore$ minsta värde

för $\boxed{A = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx}$

$f(x) = \sin x$ på $[0, \pi]$.

$$A = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin x\, dx = \frac{1}{\pi}\left[-\cos x\right]_0^\pi = \frac{2}{\pi}$$

[redacted]

$$\int_0^\pi \left(\sin x - \frac{2}{\pi}\right)^2 dx = \int_0^\pi \left(\frac{1-\cos 2x}{2} - \frac{4}{\pi}\sin x + \frac{4}{\pi^2}\right) dx = \frac{\pi^2 - 8}{2\pi}$$

[redacted]