Linköpings universitet
Magnus Berggren, MAI

Tentamen i Analys i en variabel del 2, utbildningskod TAIU10, modul TEN2. 2023-08-19 , kl 8.00 – 13.00

Penna,radergummi,linjal,och passare får användas. Formelsamlingar och andra hjälpmedel är ej tillåtna. Lösningarna skall vara fullständiga,välmotiverade,ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Uppgifterna bedöms med 0 – 3 poäng. För betyg n (n = 3, 4 eller 5) krävs minst 4(n-1) poäng. Godkänd dugga 3 ger 1-2 bonuspoäng. Observera att bonus enbart gäller för betyget 3. Skriv på omslaget hur många bonuspoäng (B=0,B=1 eller B=2) du har.

---

1) Bestäm den lösning till differentialekvationen $y'+2xy=x$ som uppfyller begynnelsevillkoret $y(0)=1$.

2) Beräkna följande integraler

a) $\int_1^e \ln x\,dx$ b) $\int_0^{\pi^2} \sin\sqrt{x}\,dx$ c) $\int_1^2 \frac{1}{x^2+x}dx$

3) Betrakta det plana område som definieras av olikheterna $0 \le y \le \frac{1}{\sqrt{x(x+1)}}$, $1 \le x \le 2$. Beräkna volymen av den kropp som uppstår då området roteras ett varv kring x-axeln.

4) Bestäm alla lösningar till differentialekvationen

$$y''(x)-6y'(x)+5y(x)=10x-7.$$

5) Beräkna följande gränsvärden

a) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-\cos 2x}{x^2}$ (1p) b) $\lim_{x\to\infty} (e^{1/x}\sqrt{x^4+x^2}-x^2-x)$ (2p)

6) Beräkna längden av kurvan $y=\frac{2}{3}(1+x^2)^{3/2}$, $-1 \le x \le 1$.

7) Låt $f(x)=\frac{1}{\cos x}$, $0 \le x < \frac{\pi}{2}$. Visa att f har en invers g samt beräkna

$$\int_1^{\sqrt{2}} g(x)dx.$$

Kortfattade lösningsförslag. Analys i en variabel

del 2. **2023-08-19**

1. $$y' + 2xy = x \quad (\text{i.f} = e^{x^2})$$

$$y'e^{x^2} + 2xe^{x^2}y = xe^{x^2}$$

$$(ye^{x^2})' = xe^{x^2}$$

$$ye^{x^2} = \int xe^{x^2}\,dx = \Big/ \begin{matrix} t = x^2 \\ \text{osv.} \end{matrix} \Big/ = \frac{e^{x^2}}{2} + C$$

$$y(x) = \frac{1}{2} + Ce^{-x^2}$$

$y(0) = 1$ ger $$1 = \frac{1}{2} + C\underbrace{e^0}_{=1}$$

$$C = \frac{1}{2}.$$

Svar: $$y(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-x^2}$$

2 a. $$\int_1^e 1\cdot\ln x\,dx \underset{p.i}{=} \left[x\ln x\right]_1^e - \int_1^e \cancel{x}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}\,dx =$$

$$e\underbrace{\ln e}_{=1} - \underbrace{\ln 1}_{=0} - \left[x\right]_1^e = e - e + 1 = 1$$

2 b. $$\int_0^{\pi^2} \sin\sqrt{x}\,dx = \Big/ \begin{matrix} t = \sqrt{x} \\ x = t^2 \\ dx = 2t\,dt \end{matrix} \Big/ = \int_0^{\pi} 2t\sin t\,dt \underset{p.i}{=}$$

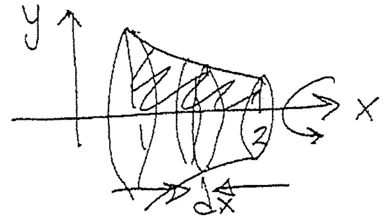
$$\left[-2t\cos t\right]_0^{\pi} + \underbrace{\int_0^{\pi} 2\cos t\,dt}_{=0} = -2\pi\underbrace{\cos\pi}_{=-1} = 2\pi$$

2 c. $$\int_1^2 \frac{1}{x(x+1)}\,dx = \int_1^2 \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}\right)dx =$$

$A = 1$, $B = -1$

$$\int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)dx = \left[\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|\right]_1^2 = \ln\frac{2}{3} - \ln\frac{1}{2} =$$

$$\ln\frac{4}{3}$$

3. 

Skivformeln.

$$V = \int_1^2 \pi y^2\,dx =$$

$$\pi\int_1^2 \frac{1}{x(x+1)}\,dx = \pi\ln\frac{4}{3}$$ enligt. 2c.

4. $$y'' - 6y' + 5y = 10x - 7$$

K.E. $$r^2 - 6r + 5 = 0$$

$$r = 3 \pm \sqrt{9-5}$$

$$r = 3 \pm 2 \iff \begin{cases} r_1 = 5 \\ r_2 = 1 \end{cases}$$

$$y_h = Ce^{5x} + De^{x}$$

Sök y_p. Ansats. $y_p = Ax + B$, $y_p' = A$, $y_p'' = 0$

insättning ger.

$$-6A + 5(Ax+B) = 10x - 7$$

$$5Ax + 5B - 6A = 10x - 7$$

$$\iff \begin{cases} 5A = 10 \\ 5B - 6A = -7 \end{cases} \iff \begin{cases} A = 2 \\ B = 1 \end{cases}$$

$$y_p = 2x + 1$$

$$\underline{y = y_h + y_p = Ce^{5x} + De^{x} + 2x + 1}$$

---

5 a. $\dfrac{e^{x^2} - \cos 2x}{x^2} = \Big/$ Maclaurinutv. $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \dots$, $\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots \Big/ =$

$$\frac{\cancel{1} + x^2 + O(x^4) - \left(\cancel{1} - \frac{(2x)^2}{2!} + O(x^4)\right)}{x^2} =$$

$$\frac{3x^2 + O(x^4)}{x^2} = 3 + \underbrace{O(x^2)}_{\to 0} \longrightarrow \underline{\underline{3}}$$

då $x \to 0$

---

5 b. $e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x^4 + x^2} - x^2 - x =$

$e^{\frac{1}{x}} \cdot x^2 \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - x^2 - x = \Big/$ Maclaurinutv. $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2} \to 0$ då $x \to \infty \Big/$

$$\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) x^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\frac{1}{x^2} + O\left(\frac{1}{x^4}\right)\right) - x^2 - x =$$

$$\cancel{x^2} + \cancel{x} + 1 + \underbrace{O\left(\frac{1}{x}\right)}_{\to 0} - \cancel{x^2} - \cancel{x} \longrightarrow \underline{\underline{1}}$$

då $x \to \infty$

---

6.  $L = \sqrt{dx^2 + dy^2} =$

$\displaystyle\int \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \Big/ \; y = \frac{2}{3}(1 + x^2)^{3/2}, \; y' = (1 + x^2)^{1/2} \cdot 2x \Big/ =$

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1 + 4x^2(1 + x^2)}\, dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{(1 + 4x^2 + 4x^4)}\, dx =$$

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{(1 + 2x^2)^2}\, dx = \int_{-1}^{1} (1 + 2x^2)\, dx = 2\int_{0}^{1} (1 + 2x^2)\, dx$$

$$= 2\left[x + \frac{2x^3}{3}\right]_0^1 = 2\left(1 + \frac{2}{3}\right) = \underline{\frac{10}{3}\ \text{l.e.}}$$

7. $\cos x$ strängt avt. för $0 \le x < \pi/2$

$\Rightarrow$ f strängt väx. $\Rightarrow$ f injektiv.

$$\int_1^{\sqrt{2}} g(x)\,dx = \left/ \begin{array}{c} t = g(x) \\ x = f(t) \\ dx = f'(t)\,dt \end{array} \right/ = \int_0^{\pi/4} \underset{\downarrow}{t}\, \underset{\uparrow}{f'(t)}\,dt \underset{p.i}{=}$$

$$\Big[t f(t)\Big]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} f(t)\,dt = \frac{\pi}{4}\cdot\sqrt{2} - \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos x}\,dx =$$

$$\frac{\pi\sqrt{2}}{4} - \int_0^{\pi/4} \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}\,dx = \left/ \begin{array}{c} y = \sin x \\ \vdots \\ \text{osv} \end{array} \right/ =$$

$$\ldots\ldots = \frac{\pi\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|\right]_0^{\pi/4}$$

$$= \ldots\ldots = \underline{\underline{\frac{\pi\sqrt{2}}{4} - \ln(\sqrt{2}+1)}}$$