Linköpings universitet
Magnus Berggren, MAI

Tentamen i Analys i en variabel del 2, utbildningskod TAIU10, modul TEN2. 2024-01-09 , kl 8.00 – 13.00

Penna,radergummi,linjal,och passare får användas. Formelsamlingar och andra hjälpmedel är ej tillåtna. Lösningarna skall vara fullständiga,välmotiverade,ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Uppgifterna bedöms med 0 – 3 poäng. För betyg n (n = 3, 4 eller 5) krävs minst 4(n-1) poäng. Godkänd dugga 3 ger 1-2 bonuspoäng. Observera att bonus enbart gäller för betyget 3. Skriv på omslaget hur många bonuspoäng (B=0,B=1 eller B=2) du har.

---

1. Beräkna följande integraler

a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x+1}{x^2+3x}\,dx$ (1p) b) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{2+\sin x}\,dx$ (1p) c) $\displaystyle\int \ln\sqrt{x}\,dx$ (1p)

2. Området mellan x-axeln och kurvan $y=\sin x$, $0\le x\le\pi$, roteras ett varv kring y-axeln. Hur stor volym får den kropp som uppkommer vid rotationen?

3. Bestäm den lösning till differentialekvationen

$$y''(x)-5y'(x)+6y(x)=5e^{3x}$$ för vilken gäller att $y(0)=1$ och $y'(0)=4$

4. Bestäm den lösning till differentialekvationen $xy'-\dfrac{y}{x+1}=\dfrac{x^3}{x+1}e^{-x}$, $x>0$ för vilken gäller att $\lim\limits_{x\to\infty} y(x)=1$

5. Beräkna följande gränsvärden

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x^2-2x\ln(1+x)}{5x(\cos x-1)}$ (1p) b) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{(x^{2/3}-1)(x-1)}{\arctan(2x-2)^2}$ (1p)

c) Bestäm konstanten a så att gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\ln(1+x)+\sin x+ax^2-3x}{\sin x-x}$$

existerar ändligt. Bestäm också detta gränsvärde. (1p)

6. Är följande generaliserade integraler konvergenta? Beräkna i så fall värdet.

a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x}{1+x^2}\,dx$ (1p) b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x+3}{(x+2)\sqrt{x}}\,dx$ (2p)

7. En kurva ges i polära koordinater av $r=\dfrac{3}{7}\varphi^2$, $0\le\varphi\le a$. Bestäm konstanten a så att kurvans längd blir 8 längdenheter.

Kortfattade lösningsförslag

1 a. $\displaystyle\int_1^2 \frac{x+1}{x(x+3)}\,dx = \int_1^2 \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x+3}\right) dx =$ PBU $A = \frac{1}{3}$ $B = \frac{2}{3}$

$\displaystyle = \frac{1}{3}\int_1^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x+3}\right) dx = \frac{1}{3}\Big[\ln|x| + 2\ln|x+3|\Big]_1^2 =$

$\displaystyle = \frac{1}{3}\Big(\ln 2 + 2\ln 5 - (\underbrace{\ln 1}_{=0} + \underbrace{2\ln 4}_{=4\ln 2})\Big) =$

$\displaystyle = \frac{1}{3}\left(2\ln 5 - 3\ln 2\right)$

b. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{2+\sin x}\,dx = \ln(2+\sin x) + C$

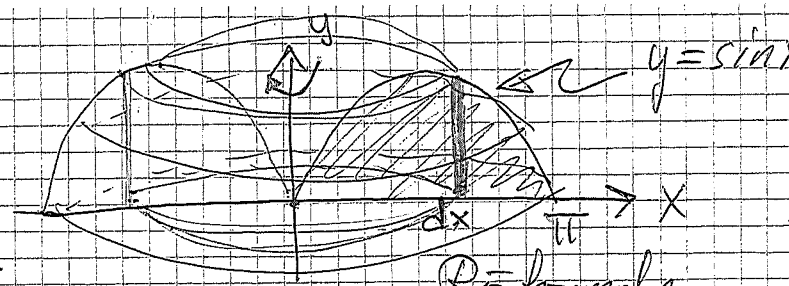
$\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$

c. $\displaystyle\int \ln\sqrt{x}\,dx = \frac{1}{2}\int 1\cdot\ln x\,dx \underset{p.i}{=}$

$\displaystyle = \frac{1}{2}\left(x\ln x - \int x\,\frac{1}{x}\,dx\right) = \frac{x}{2}\ln x - \frac{x}{2} + C =$

$\displaystyle = \frac{1}{2}\left(x\ln x - x\right) + C$

2.



Rörformeln.

$\displaystyle V = \int_0^{\pi} 2\pi x\sin x\,dx = 2\pi\int_0^{\pi} x\sin x\,dx \underset{p.i}{=}$

$\displaystyle = 2\pi\left(\Big[-x\cos x\Big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\cos x\,dx\right) =$

$\displaystyle = 2\pi\Big(\pi - 0 + \underbrace{\Big[\sin x\Big]_0^{\pi}}_{=0}\Big) = 2\pi^2$

Svar: $2\pi^2$ v.e.

3. $y'' - 5y' + 6y = 5e^{3x}$

I. Sök y_h

$y'' - 5y' + 6y = 0$

K.E. $r^2 - 5r + 6 = 0 \iff (r-2)(r-3) = 0$

$r_1 = 2 \quad r_2 = 3$

$y_h = Ce^{2x} + De^{3x}$

II. Sök y_p

$$y'' - 5y' + 6y = 5e^{3x}$$

Sub. $y = ze^{3x}$, där $z = z(x)$

$$y' = z'e^{3x} + ze^{3x}\cdot 3 = (z' + 3z)e^{3x}$$

$$y'' = (z'' + 3z')e^{3x} + (z' + 3z)e^{3x}\cdot 3 =$$

$$= (z'' + 6z' + 9z)e^{3x}$$ insättning ger

$$\cancel{e^{3x}}\left(z'' + 6z' + 9z - 5(z' + 3z) + 6z\right) = 5\cancel{e^{3x}}$$

$$z'' + z' = 5$$

Ansats: $z_p = ax$, $z_p' = a$, $z_p'' = 0$

$a = 5$ $z_p = 5x$, $y_p = 5xe^{3x}$

$$y = y_h + y_p = Ce^{2x} + De^{3x} + 5xe^{3x}$$

$$y'(x) = 2Ce^{2x} + 3De^{3x} + 5e^{3x} + 15xe^{3x}$$

$y(0) = 1$ ger $C + D = 1$

$y'(0) = 4$ ger $2C + 3D + 5 = 4$

$\Longleftrightarrow$ $C = 4$, $D = -3$

Svar: $\boxed{y = 4e^{2x} - 3e^{3x} + 5xe^{3x}}$

4. $$xy' - \frac{y}{x+1} = \frac{x^3}{x+1}e^{-x}, \quad x > 0$$

$$y' - \frac{1}{x(x+1)}y = \frac{x^2}{x+1}e^{-x} \quad *$$

$$i.f. = e^{G(x)} = e^{\ln|x+1| - \ln|x|} = \frac{x+1}{x}$$

$$g(x) = -\frac{1}{x(x+1)} = \frac{-1}{x} + \frac{1}{x+1}$$

mult. * med i.f.

$$\Longleftrightarrow \quad y'\frac{x+1}{x} - \frac{1}{x^2}y = xe^{-x} \quad \Longleftrightarrow$$

$$\left(y\frac{x+1}{x}\right)' = xe^{-x}$$

$$y\frac{x+1}{x} = \int xe^{-x}\,dx \underset{p.i}{=} -xe^{-x} - \int -e^{-x}\,dx =$$

$$= -xe^{-x} - e^{-x} + C$$

$$y = \frac{x}{x+1}\left(-(x+1)e^{-x} + C\right) = -xe^{-x} + \frac{Cx}{x+1}$$

$\lim_{x\to\infty} y(x) = 1$ $-xe^{-x} \to 0$, $\frac{Cx}{x+1} \to C$ då $x \to \infty$.

villkoret ger $C = 1$.

Svar: $\boxed{y = -xe^{-x} + \frac{x}{x+1}}$

5 a. typ $\left[\frac{0}{0}\right]$.

$$\frac{\sin 2x^2 - 2x\ln(1+x)}{5x(\cos x - 1)} = \left| \begin{array}{c} \text{Maclaurinutv.} \\ \sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \dots \\ \text{osv} \end{array} \right|$$

$$= \frac{2x^2 + O(x^6) - 2x\left(x - \frac{x^2}{2} + O(x^3)\right)}{5x\left(1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4) - 1\right)} =$$

$$= \frac{x^3 + O(x^4)}{-\frac{5}{2}x^3 + O(x^5)} = \frac{\cancel{x^3}(1 + \underbrace{O(x)}_{\to 0})}{\cancel{x^3}(-\frac{5}{2} + \underbrace{O(x^2)}_{\to 0})} \to \underline{\underline{\frac{-2}{5}}}$$

då $x \to 0$.

5b. typ $\left[\frac{0}{0}\right]$

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x^{2/3} - 1)(x-1)}{\arctan(2(x-1))^2} = \left| \begin{array}{c} t = x-1 \\ t \to 0 \end{array} \right|$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{((1+t)^{2/3} - 1)\, t}{\arctan 4t^2} = \left| \begin{array}{c} \text{Maclaurin} \\ \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \dots \\ \text{osv} \end{array} \right|$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{(\cancel{1} + \frac{2}{3}t + O(t^2) - \cancel{1})\, t}{4t^2 + O(t^6)} = \lim_{t \to 0} \frac{\cancel{t^2}(\frac{2}{3} + \underbrace{O(t)}_{\to 0})}{\cancel{t^2}(4 + \underbrace{O(t^4)}_{\to 0})} =$$

$$= \frac{1}{6}$$

5c.

$$\lim_{x \to 0} \frac{2\ln(1+x) + \sin x + ax^2 - 3x}{\sin x - x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) + O(x^4) + x - \frac{x^3}{3!} + ax^2 - 3x}{x - \frac{x^3}{3!} + O(x^5) - x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x^3}\left(\frac{a-1}{x} + \frac{2}{3} - \frac{1}{6} + O(x)\right)}{\cancel{x^3}\left(-\frac{1}{6} + O(x^2)\right)}$$

om $a \neq 1$ så gäller $\frac{a-1}{x} \to \pm\infty$ då $x \to 0$.

Alltså gr.v $\underline{\underline{\text{ändligt}}}$ $\Leftrightarrow a = 1$

$a=1$ ger

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{3}{6} + \underbrace{O(x)}_{\to 0}}{-\frac{1}{6} + \underbrace{O(x^2)}_{\to 0}} = -3.$$

Svar: $a = 1$

gr.v $= -3$.

6 a $\displaystyle\int_1^{\omega} \frac{x}{1+x^2}\,dx = \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_1^{\omega} =$

$\displaystyle = \frac{1}{2}\underbrace{\ln(1+\omega^2)}_{\to\infty} - \frac{1}{2}\ln 2 \longrightarrow \infty$ då $\omega \to \infty$.

Svar: $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx$ är divergent.

6b. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x+3}{(x+2)\sqrt{x}}\,dx$ är generaliserad i 0 samt i ∞.

Uppdelning krävs.

$$\int_0^{\infty} \frac{x+3}{(x+2)\sqrt{x}}\,dx = \underbrace{\int_0^{1} \frac{x+3}{(x+2)\sqrt{x}}\,dx}_{\text{jfr } \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx,\ \alpha=1/2,\ \text{konv.}} + \underbrace{\int_1^{\infty} \frac{x+3}{(x+2)\sqrt{x}}\,dx}_{\text{jfr } \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}dx,\ \alpha=1/2<1,\ \text{div.}}$$

Studera $\displaystyle\int_1^{\omega} \frac{x+3}{(x+2)\sqrt{x}}\,dx$ låt $\omega \to \infty$.

$$\left|\begin{array}{l} t=\sqrt{x} \\ x=t^2 \\ dx = 2t\,dt \end{array}\right| = \int_1^{\sqrt{\omega}} \frac{(t^2+3)2\cancel{t}}{(t^2+2)\cancel{t}}\,dt =$$

$$= 2\int_1^{\sqrt{\omega}}\left(1+\frac{1}{t^2+2}\right)dt = 2\int_1^{\sqrt{\omega}}\left(1+\frac{1}{2}\frac{1}{\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\right)dt$$

$$= 2\left[t + \frac{1}{2}\frac{\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right]_1^{\sqrt{\omega}} =$$

$$= 2\left(\underbrace{\sqrt{\omega}}_{\to\infty} + \frac{1}{\sqrt{2}}\underbrace{\arctan\left(\frac{\sqrt{\omega}}{\sqrt{2}}\right)}_{\to\pi/2} - 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

$\longrightarrow \infty$ då $\omega \to \infty$.

Svar: 6b. divergent

7. $L = \int \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_0^a \sqrt{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2}\, d\varphi$

$= \left| \begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ \text{mm.} \\ \text{se boken} \end{array} \right| = \int_0^a \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\varphi =$

$= \int_0^a \sqrt{\left(\frac{3}{7}\varphi^2\right)^2 + \left(\frac{6}{7}\varphi\right)^2}\, d\varphi =$

$= \int_0^a \sqrt{\frac{9\varphi^4}{49} + \frac{36\varphi^2}{49}}\, d\varphi = \int_0^a \frac{3}{7}\varphi\sqrt{\varphi^2+4}\, d\varphi$

$= \left[\frac{3}{7} \cdot \frac{(\varphi^2+4)^{3/2}}{\frac{3}{2}\cdot 2} \right]_0^a = \frac{1}{7}\left((a^2+4)^{3/2} - 8\right) = 8$

givet.

$\Longleftrightarrow (a^2+4)^{3/2} = 64 \Longleftrightarrow$ $(a>0)$

$a^2 + 4 = (2^6)^{2/3} = 16 \Longleftrightarrow a^2 = 12 \Longleftrightarrow a = 2\sqrt{3}$

Svar: $a = 2\sqrt{3}$.