Linköpings universitet

Magnus Berggren, MAI

Tentamen i Analys i en variabel del 2, utbildningskod TAIU10, modul TEN2. 2024-03-12 , kl 14.00 – 19.00

Penna,radergummi,linjal,och passare får användas. Formelsamlingar och andra hjälpmedel är ej tillåtna. Lösningarna skall vara fullständiga,välmotiverade,ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Uppgifterna bedöms med 0 – 3 poäng. För betyg n (n = 3, 4 eller 5) krävs minst 4(n-1) poäng. Godkänd dugga 3 ger 1-2 bonuspoäng. Observera att bonus enbart gäller för betyget 3.

---

1. Beräkna följande integraler

   a) $\int x^2\sqrt{x^3+3}\,dx$ (1p) b) $\int_0^1 xe^{-2x}dx$ (1p) c) $\int \frac{3}{x^2+x-2}dx$ (1p)

2. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y'-\frac{2}{x}y = x\ln x,\quad x>0$, som uppfyller villkoret $y(1)=2$.

3. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y''-3y'+2y=4xe^{3x}$ som uppfyller villkoren $y(0)=0$ och $y'(0)=6$.

4.
   a) Beräkna gränsvärdet

   $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x\sin x}. \qquad (2p)$$

   b)
   Bestäm konstanten a så att derivatan av ordning 9 av $f(x)=x^3(ae^{x^2}-\cos x^3)$ för $x=0$ blir lika med 0. (1p)

5. Bestäm volymen av den kropp som uppstår då området

   $$0 \le y \le \sqrt{x}e^{-x} \qquad x \ge 0$$

   roteras ett varv kring x-axeln.

6. Beräkna arean av den yta som uppkommer då kurvan $y=x^2$, $0\le x\le 1$, roteras ett varv kring y-axeln.

7. Lös integralekvationen $x-y(x)=\int_x^0 \frac{2ty(t)}{1+t^2}dt.$

Kortfattade lösningar till tentamen

TAIU10 del 2. 2024-03-12.

1 a.

$$\int x^2\sqrt{x^3+3}\,dx = \left/ \begin{matrix} t = x^3+3 \\ dt = 3x^2\,dx \end{matrix} \right/ =$$

$$= \frac{1}{3}\int \sqrt{t}\,dt = \frac{1}{3}\,\frac{t^{3/2}}{\frac{3}{2}} + C = \underline{\underline{\frac{2}{9}\left(x^3+3\right)^{3/2} + C}}$$

1 b.

$$\int_0^1 x e^{-2x}\,dx \underset{p.i}{=} \left[\frac{e^{-2x}}{-2}\,x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{e^{-2x}}{-2}\,dx =$$

$$= \frac{e^{-2}}{-2} + \frac{1}{2}\left[\frac{e^{-2x}}{-2}\right]_0^1 = \frac{e^{-2}}{-2} - \frac{1}{4}\left(e^{-2}-1\right) =$$

$$= -\frac{3}{4}e^{-2} + \frac{1}{4} = \underline{\underline{\frac{-3}{4e^2} + \frac{1}{4}}}$$

1 c.

$$\int \frac{3}{x^2+x-2}\,dx = \int \frac{3}{(x-1)(x+2)}\,dx =$$

$$\underset{PBU}{=} \int\left(\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}\right)dx = \int\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}\right)dx =$$

$$\left/ \text{ ger } \begin{matrix} A = 1 \\ B = -1 \end{matrix} \right/ \quad = \ln|x-1| - \ln|x+2| + C$$

$$= \underline{\underline{\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right| + C}}$$

2.

$$y' - \frac{2}{x}y = x\ln x \quad , \quad x > 0$$

$$\left| \begin{matrix} i.f = e^{G(x)} = e^{-2\ln x} = e^{\ln x^{-2}} = \frac{1}{x^2} \\ g(x) = -\frac{2}{x} \qquad \text{Mult. med i.f} \end{matrix} \right|$$

$$\Longleftrightarrow \quad y'\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}y = \frac{\ln x}{x} \quad \Longleftrightarrow$$

$$\left(y\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{\ln x}{x} \quad \Longleftrightarrow$$

$$y\frac{1}{x^2} = \int \frac{\ln x}{x}\,dx = \frac{(\ln x)^2}{2} + C$$

$$y = \frac{x^2}{2}(\ln x)^2 + Cx^2$$

till sist villkoret $y(1) = 2$ ger

$$2 = \frac{1}{2}\underbrace{(\ln 1)^2}_{=0} + C\cdot 1^2 \Longleftrightarrow C = 2.$$

Svar: $y(x) = \frac{x^2}{2}(\ln x)^2 + 2x^2$

3. $y'' - 3y' + 2y = 4xe^{3x}$

(I.) Sök y_h. $y'' - 3y' + 2y = 0$

K.E. $r^2 - 3r + 2 = 0$

$r_1 = 2$, $r_2 = 1$

$y_h = Ce^{2x} + De^{x}$

(II.) Sök y_p.

Sub $y = ze^{3x}$ där $z = z(x)$

$y' = z'e^{3x} + 3ze^{3x} = (z' + 3z)e^{3x}$

$y'' = \dots = (z'' + 6z' + 9z)e^{3x}$

insättning ger

$(z'' + 6z' + 9z - 3z' - 9z + 2z)\cancel{e^{3x}} = 4x\cancel{e^{3x}}$

$z'' + 3z' + 2z = 4x$ Ansats $z_p = ax + b$

$3a + 2(ax + b) = 4x$ $\quad z_p' = a$

$z_p'' = 0$

$\begin{cases} 2a = 4 \\ 3a + 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \end{cases}$

$z_p = 2x - 3$, $y_p = (2x - 3)e^{3x}$

$y = y_h + y_p = Ce^{2x} + De^{x} + (2x - 3)e^{3x}$

$y' = 2Ce^{2x} + De^{x} + 2e^{3x} + (2x - 3)e^{3x} \cdot 3$

$y(0) = 0$ ger $C + D - 3 = 0$

$y'(0) = 6$ ger $2C + D + 2 - 9 = 6$

$\Leftrightarrow \begin{cases} C + D = 3 \\ 2C + D = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 10 \\ D = -7 \end{cases}$

Svar: $y = 10e^{2x} - 7e^{x} + (2x - 3)e^{3x}$

---

4 a. $\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x \sin x} = \Big/$ Maclaurinutv. $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \dots$ $t = x^2$ $\Big/$

$= \lim_{x \to 0} \frac{1 + x^2 + \mathcal{O}(x^4) - \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \mathcal{O}(x^4)\right)}{x\left(x + \mathcal{O}(x^3)\right)} =$

$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{3}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^4)}{x^2 + \mathcal{O}(x^4)} = \Big/$ Bryt ut dominerande faktor $\Big/$

$= \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x^2}\left(\frac{3}{2} + \underbrace{\mathcal{O}(x^2)}_{\to 0}\right)}{\cancel{x^2}\left(1 + \underbrace{\mathcal{O}(x^2)}_{\to 0}\right)} = \frac{3}{2}$

4b. Maclaurinutv.

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(9)}(0)}{9!}x^9 + \dots + O(x^{n+1})$$

Bestäm alltså a så att koeff. framför x^9 blir lika med 0.

$$f(x) = x^3\left(ae^{x^2} - \cos x^3\right) =$$

Maclaurin. $\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} \dots$ $t = x^3$ osv

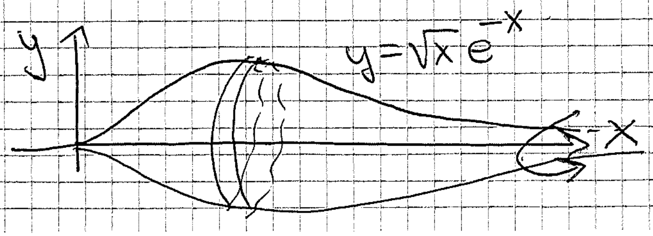
$$= x^3\left(a\left(1 + x^2 + \frac{(x^2)^2}{2!} + \frac{(x^2)^3}{3!} + O(x^8)\right) - \left(1 - \frac{(x^3)^2}{2} + O(x^{12})\right)\right)$$

$$= \dots + \underbrace{\left(\frac{a}{3!} + \frac{1}{2}\right)}_{=0} x^9 + O(x^{11})$$ ger $a = -3$

Svar: $a = -3$.

5. $$V = \int_0^\omega \pi\left(\sqrt{x}e^{-x}\right)^2 dx$$ låt $\omega \to \infty$.

Skivformeln.



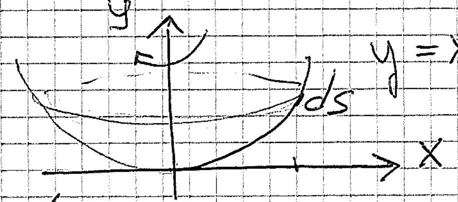
$$\int_0^\omega xe^{-2x}\,dx = \left[\frac{e^{-2x}}{-2}x - \frac{e^{-2x}}{4}\right]_0^\omega =$$

Se 1b.

$$= \underbrace{\frac{\omega}{-2e^{2\omega}}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{1}{4e^{2\omega}}}_{\to 0} - \left(0 - \frac{1}{4}\right) \to \frac{1}{4}$$ då $\omega \to \infty$.

enligt standardgr.v. då $\omega \to \infty$.

Svar: $V = \frac{\pi}{4}$ v.e.

6. 

$y = x^2$, $0 \le x \le 1$

$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$

$$A = \int_0^1 2\pi x\,ds = 2\pi\int_0^1 x\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx =$$

$$= 2\pi\int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}\,dx = 2\pi\left[\frac{(1+4x^2)^{3/2}}{\frac{3}{2}\cdot 8}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5} - 1\right)$$ a.e.

7. $$x - y(x) = \int_x^0 \frac{2t\,y(t)}{1+t^2}\,dt$$

derivering ger

$$1 - y'(x) = 0 - \frac{2x\,y(x)}{1+x^2} \iff$$

$$y' - \frac{2x}{1+x^2}\,y = 1$$

i-f-metoden.

$$\text{i-f} = e^{\int \frac{-2x}{1+x^2}\,dx} = e^{-\ln(1+x^2)} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$y\,\frac{1}{1+x^2} = \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C$$

$$y = (1+x^2)(\arctan x + C)$$

$x=0$ ger $\quad 0 - y(0) = \underbrace{\int_0^0 \frac{2t\,y(t)}{1+t^2}\,dt}_{=0}$

$\iff y(0) = 0$ ger

$$0 = 1\,(\underbrace{\arctan 0}_{=0} + C)$$

$$C = 0$$

Svar: $\underline{\underline{y = (1+x^2)\cdot\arctan x}}$