Linköpings universitet
Magnus Berggren, MAI

Tentamen i Analys i en variabel del 2, utbildningskod TAIU10, modul TEN2. 2024-08-24 , kl 8.00 – 13.00

Penna,radergummi,linjal,och passare får användas. Formelsamlingar och andra hjälpmedel är ej tillåtna. Lösningarna skall vara fullständiga,välmotiverade,ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Uppgifterna bedöms med 0 – 3 poäng. För betyg *n* (*n* = 3, 4 eller 5) krävs minst 4(*n*-1) poäng. Godkänd dugga 3 ger 1-2 bonuspoäng. Observera att bonus enbart gäller för betyget 3.

---

1. Bestäm en primitiv funktion till

   (a) $x \sin x^2$ (b) $x \ln x$ (c) $\dfrac{1}{x^2-1}$

2. Räkna ut volymen av den rotationskropp som bildas då ytan mellan kurvan $y = \sqrt{x}$, x-axeln och linjen $x = 1$ roterar ett varv kring y-axeln.

3. Bestäm den lösning till differentialekvationen

$$y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = 5e^{3x}$$

   för vilken gäller att $y(0) = 1$ och $y'(0) = 4$.

4. (a) Bestäm Maclaurinpolynomet av ordning 4 till $f(x) = \sin(x + x^2)$

   (b) Låt $f(x) = x \cos x + 1$. Bestäm Taylorpolynomet av ordning 2 till f kring punkten $a = \pi/2$.

5. Bestäm den lösning till differentialekvationen $\dfrac{y'(x)}{\cos x} - y(x) = \sin x$ som uppfyller villkoret $y(\pi) = 0$.

6. Bestäm konstanterna a, b och c så att funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2\sin ax + e^{bx} - a\cos x}{x^2} & , \ x \neq 0 \\ c & , \ x = 0 \end{cases}$$

   blir kontinuerlig.

7. Skissera den kurva som i polära koordinater har ekvationen

$$r = 1 + \cos\theta \quad , \quad -\pi \leq \theta \leq \pi$$

   Beräkna arean av det område som innesluts av kurvan.

1. (a) Variabelsubstitutionen $t = x^2$ med $dt = 2x\,dx$ ger

$$\int x \sin x^2\,dx = \frac{1}{2}\int \sin t\,dt = -\frac{1}{2}\cos t = -\frac{1}{2}\cos x^2 + C.$$

(b) Partiell integration där vi integrerar upp x och deriverar ner $\ln x$ ger

$$\int x \ln x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C.$$

(c) Faktorisering av nämnaren och parialbråksuppdelning ger

$$\int \frac{1}{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\,dx = \frac{1}{2}(\ln|x-1| - \ln|x+1|) + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C.$$

2. Använder vi rörformeln får vi volymen

$$2\pi \int_0^1 xy\,dx = 2\pi \int_0^1 x\sqrt{x}\,dx = 2\pi \int_0^1 x^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{4\pi}{5} \text{ v.e.}$$

3. Karakteristiska ekvationen $r^2 - 5r + 6 = 0$ med rötterna $r_1 = 2$ och $r_2 = 3$ ger den homogena lösningen $y_h(x) = Ae^{2x} + Be^{3x}$. Ansatsen $y_p = ze^{3x}$ ger efter hyfsning ekvationen $z'' + z' = 5$ vars lösning är $z = 5x$. Alltså är $y_p = 5xe^{3x}$. Allmänna lösningen till ekvationen är således $y = Ae^{2x} + Be^{3x} + 5xe^{3x}$. Begynnelsevillkoren ger den speciella lösningen $y = 4e^{2x} + (5x-3)e^{3x}$.

4. (a) Maclaurinutvecklingen $\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + t^5 B(t)$ ger att

$$\begin{aligned}
\sin(x + x^2) &= \sin t = t - \frac{t^3}{3!} + t^5 B_1(t) \\
&= (x + x^2) - \frac{(x+x^2)^3}{3!} + x^5 B_2(x) \\
&= x + x^2 - \left(\frac{x^3}{6} + \frac{3x^4}{6}\right) + x^5 B_3(x) \\
&= x + x^2 - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{2} + x^5 B_3(x).
\end{aligned}$$

Alltså ges maclaurinpolynomet av grad 4 till $\sin(x + x^2)$ av

$$P_4(x) = x + x^2 - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{2}.$$

(b) Taylors formel ger att taylorspolynomet av ordning 3 till f kring $\pi/2$ ges av

$$P_2(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{f''(\frac{\pi}{2})}{2!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2.$$

Eftersom $f(x) = x\cos x + 1$, $f'(x) = \cos x - x\sin x$ och $f''(x) = -2\sin x - x\cos x$, så $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}$, och $f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2$ och därmed är

$$P_2(x) = 1 - \frac{\pi}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2.$$

5. Vi skriver om ekvationen på formen $y'(x) - \cos x\, y(x) = \sin x \cos x$. Låt $g(x) = -\cos x$. Då är $G(x) = \int g(x)\,dx = -\int \cos x\,dx = -\sin x$ en primitiv till g. Ekvationen kan, efter multiplikation med den integrerande faktorn $e^{-\sin x}$, skrivas:

$$\frac{d}{dx}(e^{-\sin x}y) = \sin x \cos x e^{-\sin x}.$$

Integrerar vi upp högraledet:

$$\begin{aligned}\int \sin x e^{-\sin x}\cos x\,dx &= \{t = \sin x\} = \int te^{-t}\,dt \\ &= \{P.I.\} = -te^{-t} - e^{-t} + C = -\sin x e^{-\sin x} - e^{-\sin x} + C.\end{aligned}$$

Integrerar vi upp vänstraledet och dividerar med $e^{-\sin x}$ fås:

$$y(x) = -\sin x - 1 + Ce^{\sin x}.$$

Villkoret $y(\pi) = 0$ ger att $C = 1$. Lösningen är alltså $y(x) = -\sin x - 1 + e^{\sin x}$.

6. För att f skall vara kontinuerlig krävs att $\lim_{x\to 0} f(x) = c$. Maclaurinutveckling ger

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{2(ax + x^3B_1(x)) + (1 + bx + \frac{1}{2}b^2x^2B_2(x)) - a(1 - \frac{1}{2}x^2 + x^4B_3(x))}{x^2} \\ &= \frac{1-a}{x} + \frac{2a+b}{x} + \frac{b^2+a}{2} + xB_4(x).\end{aligned}$$

Gränsvärdet existerar om och endast om $a = 1$ och $b = -2$. Gränsvärdet blir då 5/2. För att funktionen skall vara kontinuerlig krävs alltså att $a = 1$, $b = -2$ samt $c = 5/2$.

7. Med kurvan $r = 1 + \cos\theta$ menas kurvan $x = (1 + \cos\theta)\cos\theta$ och $y = (1 + \cos\theta)\sin\theta$. Areaelementet $dA = \frac{r^2}{2}\,d\theta$ ger arean

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} r^2\,d\theta &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos\theta)^2\,d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta)\,d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(1 + 2\cos\theta + \frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)d\theta = \frac{3\pi}{2} \text{ a.e.}\end{aligned}$$