Linköpings universitet
Magnus Berggren, MAI

Tentamen i Analys i en variabel del 2, utbildningskod TAIU10, modul TEN2. 2025-01-14 , kl 8.00 – 13.00

Penna,radergummi,linjal,och passare får användas. Formelsamlingar och andra hjälpmedel är ej tillåtna. Lösningarna skall vara fullständiga,välmotiverade,ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Uppgifterna bedöms med 0 – 3 poäng. För betyg n (n = 3, 4 eller 5) krävs minst 4(n-1) poäng. Godkänd dugga 3 ger 1-2 bonuspoäng. Observera att bonus enbart gäller för betyget 3.

---

1. Beräkna följande integraler

   a) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{3+\cos x}\,dx$ (1p) b) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-x-2}\,dx$ (1p) c) $\displaystyle\int x e^{3x}\,dx$ (1p)

2. Bestäm den lösning till differentialekvationen $xy'+2y=3xe^{x^3-1},\ x\neq 0,$ som uppfyller begynnelsevillkoret $y(1)=0$.

3. Beräkna följande gränsvärden

   a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x-2x(1+x)^{1/3}}{1-\cos x}$ (1p) b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\sqrt{x^2-4x}\right)$ (2p)

4. Bestäm volymen av den rotationskropp som uppkommer då området mellan kurvan $y=x\sqrt{4-x}\,,0\leq x\leq 4$, och x-axeln roterar ett varv kring x-axeln.

5. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y''+y'-6y=e^{3x}$ som har ett gränsvärde då $x\to-\infty$ och som antar värdet 2 då $x=0$.

6. En kurva ges i polär form av ekvationen $r=e^{-\Theta}\,,0\leq\Theta\leq 2\pi$.
   Rita kurvan och beräkna dess längd.

7. Låt $V(t)$ beteckna volymen av den kropp som uppkommer då området mellan x-axeln och kurvan $y=4x+\dfrac{5}{x^3},\ t\leq x\leq 2t$ roteras ett varv kring linjen $x=t$ $(t>0)$.
   För vilket värde på t blir $V(t)$ minimal?

Kortfattade lösningsförslag till tentamen
Analys i en variabel del 2 TAIU10
2025-01-14

1 a. $\int \frac{\sin x}{3+\cos x}\,dx = -\ln(3+\cos x) + C$

b. $\int \frac{1}{x^2-x-2}\,dx = \int \frac{1}{(x+1)(x-2)}\,dx \underset{\text{PBU}}{=}$

$= \int \left(\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}\right) dx = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right| + C$

$A = -\frac{1}{3} \quad B = \frac{1}{3}$

c. $\int x e^{3x}\,dx \underset{\text{p.i}}{=} \frac{e^{3x}}{3}x - \int \frac{e^{3x}}{3}\,dx = \frac{e^{3x}}{3}x - \frac{e^{3x}}{9} + C$

2. $y'(x) + \frac{2}{x}y(x) = 3e^{x^3-1}$

$\Big/ \text{i.f} = e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{2\ln|x|} = x^2 \quad \left(\text{mult. med i.f}\right)\Big/$

$y'x^2 + 2xy = 3x^2e^{x^3-1}$

$yx^2 = \int 3x^2 e^{x^3-1}\,dx = e^{x^3-1} + C$

$y = \frac{e^{x^3-1}}{x^2} + \frac{C}{x^2}$ Svar: $y = \frac{e^{x^3-1}}{x^2} - \frac{1}{x^2}$.

$y(1) = 0$ ger $1 + C = 0$ $\quad x > 0$

$C = -1$

3. a. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x - 2x(1+x)^{1/3}}{1-\cos x} = \Big/\text{Maclaurin}\Big/ =$

$= \lim_{x\to 0} \frac{2x + \mathcal{O}(x^3) - 2x\left(1 + \frac{1}{3}x + \mathcal{O}(x^2)\right)}{1 - \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \mathcal{O}(x^4)\right)} =$

$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{2}{3}x^2 + \mathcal{O}(x^3)}{\frac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^4)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{2}{3} + \underbrace{\mathcal{O}(x)}_{\to 0}}{\frac{1}{2} + \underbrace{\mathcal{O}(x^2)}_{\to 0}} = -\frac{4}{3}$

3 b. $\lim_{x\to\infty} \left(x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - x\sqrt{1-\frac{4}{x}}\right) =$

$= \lim_{x\to\infty} x^2\left(\frac{1}{x} - \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) - x\left(1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{x} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) =$

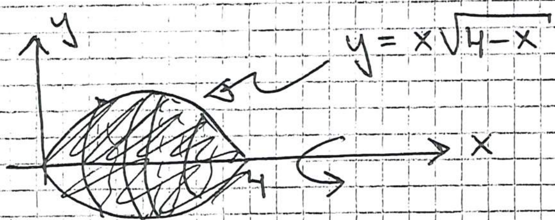
$= \lim_{x\to\infty} \left(x - \frac{1}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right) - x + 2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right)\right) =$

$\lim_{x\to\infty} \frac{3}{2} + \underbrace{\mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right)}_{\to 0} = \frac{3}{2}$

Svar: 3 a. $-\frac{4}{3}$

b. $\frac{3}{2}$.

4.



$$dV = \pi y^2 dx$$

$$V = \int dV = \int_0^4 \pi (x\sqrt{4-x})^2 dx = \pi \int_0^4 x^2(4-x)\,dx =$$

$$= \pi \int_0^4 (4x^2 - x^3)\,dx = \pi \left[\frac{4x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^4 =$$

$$= \pi \left(\frac{4^4}{3} - \frac{4^4}{4}\right) = \pi \frac{4^{\cancel{3}\cancel{4}}}{3\cdot \cancel{4}} = \frac{64\pi}{3} \text{ v.e}$$

5. $y'' + y' - 6y = e^{3x}$

1. K.E $r^2 + r - 6 = 0$

$$r = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{24}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{5}{2} = \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases}$$

$$y_h = Ce^{2x} + De^{-3x}$$

2. Sök y_p. Ansats. $y = Ae^{3x}$

$y' = 3Ae^{3x}$ $y'' = 9Ae^{3x}$ insättning ger

$$9A + 3A - 6A = 1$$
$$6A = 1$$
$$A = 1/6$$

$$y_p = \frac{1}{6}e^{3x}$$

forts nr 5.

$$y = C\underset{\to 0}{e^{2x}} + D\underset{\to \infty}{e^{-3x}} + \frac{1}{6}e^{3x} \to 0$$

då $x \to -\infty$.

$\lim_{x\to -\infty} y(x)$ exist. $\Leftrightarrow D = 0$

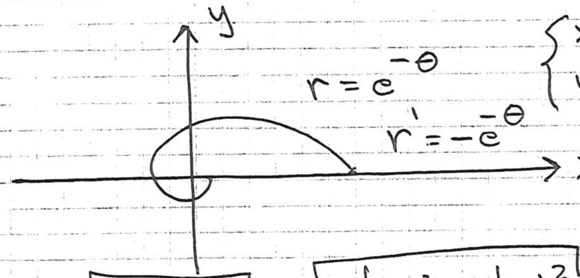
$$y(x) = Ce^{2x} + \frac{1}{6}e^{3x}$$

$y(0) = 2$ ger $2 = C + \frac{1}{6}$

$$C = \frac{11}{6}$$

Svar: $y(x) = \frac{11}{6}e^{2x} + \frac{1}{6}e^{3x}$

6.



$r = e^{-\theta}$

$r' = -e^{-\theta}$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}.$$

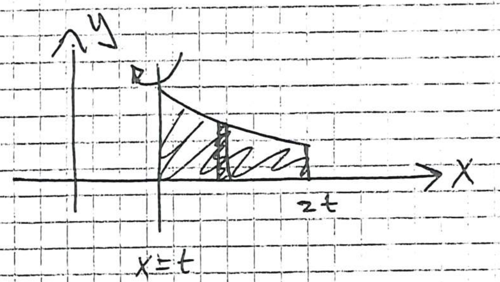
$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta = \ldots\ldots =$$

$$= \sqrt{r^2 + (r')^2}\,d\theta = \sqrt{2e^{-2\theta}}\,d\theta = \sqrt{2}e^{-\theta}\,d\theta$$

$$L = \int ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}e^{-\theta}\,d\theta = \sqrt{2}\left[-e^{-\theta}\right]_0^{2\pi} =$$

$$= \sqrt{2}\left(1 - e^{-2\pi}\right) \text{ l.e.}$$

7.



rörformeln:

$$V = \int_t^{2t} 2\pi (x-t)\, y\, dx = \int_t^{2t} 2\pi (x-t)\left(4x + \frac{5}{x^3}\right) dx =$$

$$= 2\pi \int_t^{2t} \left(4x^2 + \frac{5}{x^2} - 4xt - \frac{5t}{x^3}\right) dx =$$

$$= 2\pi \left[\frac{4x^3}{3} - \frac{5}{x} - 2x^2 t + \frac{5t}{2x^2}\right]_t^{2t} =$$

$$= 2\pi \left(\frac{32t^3}{3} - \cancel{\frac{5}{2t}} - 8t^3 + \frac{5}{8t} - \frac{4t^3}{3} + \cancel{\frac{5}{t}} + 2t^3 - \cancel{\frac{5}{2t}}\right) =$$

$$= 2\pi \left(\frac{5}{8t} + \frac{10t^3}{3}\right)$$

$$V'(t) = 2\pi\left(-\frac{5}{8t^2} + 10t^2\right) \Rightarrow V'(t) = 0$$

$$t^4 = \frac{1}{16}$$

$$t = \frac{1}{2}.$$

t		$\frac{1}{2}$	
$V'(t)$	$-$	0	$+$
$V(t)$	$\searrow$		$\nearrow$

V:s minsta värde fås för $\underline{\underline{t = \frac{1}{2}}}$