Linköpings universitet
Magnus Berggren, MAI

Tentamen i Analys i en variabel del 2, utbildningskod TAIU10, modul TEN2. 2025-03-17 , kl 14.00 – 19.00

Penna,radergummi,linjal,och passare får användas. Formelsamlingar och andra hjälpmedel är ej tillåtna. Lösningarna skall vara fullständiga,välmotiverade,ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Uppgifterna bedöms med 0 – 3 poäng. För betyg *n* (*n* = 3, 4 eller 5) krävs minst 4(*n*-1) poäng. Godkänd dugga 3 ger 1-2 bonuspoäng. Observera att bonus enbart gäller för betyget 3.

---

1. Bestäm alla lösningar till $y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = 2xe^{2x}$.

2. Bestäm a) $\displaystyle\int \frac{1}{1+4x^2}\,dx$ b) $\displaystyle\int x\cos(x^2)\,dx$ c) $\displaystyle\int x\sin x\,dx$

3. För ett radioaktivt preparat gäller att vid varje tidpunkt är sönderfallshastigheten proportionell mot mängden vid denna tidpunkt. Antag att det från början finns 3.0 mg radon. Bestäm hur stor mängd radon som återstår efter 7 dygn, om halveringstiden är 4 dygn.

4. Beräkna volymen av den kropp som uppkommer då området mellan x-axeln och kurvan $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$, $0 \le x \le 1$, roterar ett varv kring x-axeln.

5. Beräkna maclaurinpolynomet av grad 4 till
   a) $\ln(1-x^2)$ b) $\cos x \sin x$ c) $e^{\sin x}$.

6. Bestäm för $x > 0$, den lösning till differentialekvationen $xy'(x) - 2y(x) = x^3 \sin x$ för vilken $y(\pi) = 0$.

7. Bestäm längden av kurvan $\begin{cases} x = 2\ln t \\ y = t + \dfrac{1}{t} \end{cases}$, $1 \le t \le 2$.

1. K.E. $r^2-2r+2=0$ har rötterna $r=1\pm i$. Homogen lösning är då $y_h(x)=e^x(A\cos x+B\sin x)$. För att bestämma den partikulära lösningen gör vi ansatsen $y_p(x)=ze^{2x}$, där $y_p'(x)=(z'+2z)e^{2x}$ och $y_p''(x)=(z''+4z'+4z)e^{2x}$. Sätter vi in detta i ekvationen fås

$$(z''+4z'+4z)e^{2x}-2(z'+2z)e^{2x}+2ze^{2x}=2xe^{2x},$$

dvs $z''+2z'+2z=2x$. Ansatsen $z=ax+b$ insatt ger $2ax+(a+2b)=2x$, dvs $a=1$ och $b=-1$. Alltså är $y_p(x)=(x-1)e^{2x}$.
Den allmänna lösningen är $y(x)=e^x(A\cos x+B\sin x)+(x-1)e^{2x}$.

2. (a) $\displaystyle\int\frac{1}{1+(2x)^2}\,dx=\{t=2x\}=\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+t^2}\,dt=\frac{1}{2}\arctan t+C=\frac{1}{2}\arctan 2x+C$

   (b) $\displaystyle\int x\cos(x^2)\,dx=\{t=x^2\}=\frac{1}{2}\int\cos t\,dt=\frac{1}{2}\sin t+C=\frac{1}{2}\sin x^2+C$

   (c) $\displaystyle\int x\sin x\,dx=\{P.I.\}=-x\cos x+\int\cos x\,dx=-x\cos x+\sin x+C$

3. Låt $m(t)$ ange mängden radon vid tiden t. Då beskriver $m'(t)$ mängdens förändring vid tiden t och som enligt förutsättningen uppfyller $m'(t)=-km(t)$, där $k>0$. Ekvationen kan lösas m.h.a integrerande faktorn eller betraktas som separabel. Vi har att

$$\frac{dm}{dt}=-km\Rightarrow\frac{dm}{m}=-k\,dt\Rightarrow\int\frac{dm}{m}=-\int k\,dt\Rightarrow\ln m=-kt+C$$

$$\Rightarrow m=e^{-kt+C}\Rightarrow m=e^Ce^{-kt}=\{D=e^C\}=De^{-kt}.$$

Alltså, $m(t)=De^{-kt}$. Eftersom $m(0)=3.0$, så $m(t)=3e^{-kt}$. Efter 4 dygn har mängden halverats, dvs

$$\frac{3}{2}=3e^{-4k}\Rightarrow\frac{1}{2}=e^{-4k}\Rightarrow-4k=\ln\frac{1}{2}\Rightarrow-4k=-\ln 2\Rightarrow k=\frac{\ln 2}{4}.$$

Alltså, så är $m(t)=3e^{-t\frac{\ln 2}{4}}$. Efter 7 dygn finns det $m(7)=3e^{-7\frac{\ln 2}{4}}$ g radon.

4. Enligt skivformeln ges volymen av

$$\begin{aligned}\pi\int_0^1\left(\frac{\sqrt{x}}{x+1}\right)dx &= \pi\int_0^1\frac{x}{(x+1)^2}\,dx=\pi\int_0^1\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}\,dx\\ &=\pi\Big[\ln(x+1)+\frac{1}{x+1}\Big]_0^1=\pi\Big(\ln 2+\frac{1}{2}-\ln 1-1\Big)=\pi\frac{2\ln 2-1}{2}\quad\text{v.e.}\end{aligned}$$

5. a) Standardutvecklingen $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + t^5 B_1(t)$, där $t = -x^2 \to 0$, då $x \to 0$ ger

$-x^2$

$$\ln(1-x^2) = -x^2 - \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{3} - \frac{t^8}{4} + x^{10}B_1(x) = x^2 - \frac{x^4}{2} + x^6 B_2(x).$$

$-x^2$

Maclaurinpolynomet av grad 4 är alltså $x^2 - \frac{x^4}{2}$.

b) Standardutvecklingen $\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + t^5 B_1(t)$, där $t = 2x \to 0$, då $x \to 0$ ger $\cos x \sin x = \frac{1}{2}\sin 2x = \frac{1}{2}\Big(2x - \frac{(2x)^3}{3!} + (2x)^5 B_1(2x)\Big) = x - \frac{2x^3}{3} + x^5 B_2(x)$. Maclaurinpolynomet av grad 4 är alltså $x - \frac{2x^3}{3}$.

c) Standardutvecklingen $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + t^5 B(t)$, där $t = \sin x \to 0$, då $x \to 0$ ger

$$\begin{aligned} e^{\sin x} &= e^{x - \frac{x^3}{3!} + x^5 B_1(x)} == 1 + (x - \frac{x^3}{3!} + x^5 B_1(x)) + \frac{1}{2!}(x - \frac{x^3}{3!} + x^5 B_1(x))^2 \\ &\quad + \frac{1}{3!}(x - \frac{x^3}{3!} + x^5 B_1(x))^3 + \frac{1}{4!}(x - \frac{x^3}{3!} + x^5 B_1(x))^4 + (x - \frac{x^3}{3!} + x^5 B_1(x))^5 B(x) \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + x^5 B_2(x) \end{aligned}$$

Maclaurinpolynomet av grad 4 är alltså $1 + x + \frac{1}{2}x^{2} - \frac{1}{8}x^4$.

6. Ekvationen är av första ordning och linjär. Vi skriver om den på standard form $y' - \frac{2}{x}y = x^2 \sin x$ och löser med integrerande faktorn. I.F. blir

$$e^{-\int \frac{2}{x}\,dx} = e^{-2\ln x} = e^{\ln \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{x^2}.$$

Multiplicera ekvationen med I.F., så

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2}y' - \frac{2}{x^3}y &= \sin x \Rightarrow \frac{d}{dx}\Big(\frac{1}{x^2}y\Big) = \sin x \Rightarrow \frac{1}{x^2}y = \int \sin x\,dx \Rightarrow \frac{1}{x^2}y = -\cos x + C \\ &\Rightarrow y(x) = -x^2\cos x + Cx^2. \end{aligned}$$

Villkoret $y(\pi) = 0$ ger att $0 = -\pi^2\cos\pi + C\pi^2 \Rightarrow C = -1$.
Lösningen är $y(x) = -x^2(1 + \cos x)$.

7. Vi har att $x' = \frac{2}{t}$ och $y' = 1 - \frac{1}{t^2}$, så att

$$x'^2 + y'^2 = \frac{4}{t^2} + 1 - \frac{2}{t^2} + \frac{1}{t^4} = 1 + \frac{2}{t^2} + \frac{1}{t^4} = \Big(1 + \frac{1}{t^2}\Big)^2$$

Bågelementet blir då $ds = \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt = \Big(1 + \frac{1}{t^2}\Big)\,dt$ och längden ges därmed av

$$\int_1^2 \Big(1 + \frac{1}{t^2}\Big)\,dt = \Big[t - \frac{1}{t}\Big]_1^2 = \frac{3}{2} \text{ l.e.}$$