Linköpings universitet
Magnus Berggren, MAI

Tentamen i Analys i en variabel del 2, utbildningskod TAIU10, modul TEN2. 2022-01-11 , kl 8.00 – 13.00

Penna,radergummi,linjal,passare och gradskiva får användas. Formelsamlingar och andra hjälpmedel är ej tillåtna. Lösningarna skall vara fullständiga,välmotiverade,ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Uppgifterna bedöms med 0 – 3 poäng. För betyg n (n = 3, 4 eller 5) krävs minst 4(n-1) poäng. Godkänd dugga 3 ger 1-2 bonuspoäng. Observera att bonus enbart gäller för betyget 3. Skriv på omslaget hur många bonuspoäng (B=0,B=1 eller B=2) du har.

---

1. Beräkna följande integraler

   a) $\int x\sin(x^2+1)\,dx$ (1p) b) $\int xe^{3x}\,dx$ (1p) c) $\int \frac{\sqrt{x+1}}{x}\,dx$ (1p)

2. Lös differentialekvationen $y' + \frac{1}{x}y = x\sin x,\ \ x > 0,$ under villkoret $y(\pi) = \pi$.

3. Bestäm arean av det område som begränsas av kurvan $y = \frac{1}{x^2+2x+10}$, $x \geq 2$ linjen $x = 2$ och x-axeln.

4. Bestäm den lösning till differentialekvationen

   $y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = 4xe^x$

   för vilken gäller att $y(0) = 1$ och $y'(0) = 4$

5. Beräkna

   a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(2x)-\ln(1+4x)+2x}{e^{4x^2}-1}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(2\ln\frac{1+x}{x} + 1 - \sqrt{\frac{x+4}{x}}\right)$ c) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{\cos(2x-6)-1}{\sqrt[3]{x^2-6x+10}-1}$

6. Beräkna volymen av den kropp som uppkommer då området mellan kurvan $y = x^2 + 4$, och linjerna $x = 0,\ \ x = 1,\ \ y = 2$ roteras ett varv kring linjen $y = -1$.

7. En kurva $y = ax^2,\ \ 0 \leq x \leq \frac{\sqrt{3}}{2a}$ roteras ett varv kring y-axeln. Bestäm konstanten a så att rotationsarean blir lika med $42\pi\ dm^2$.

Kortfattade lösningsförslag till tentamen **Analys i en variabel del2**

2022-01-11

1 a. $\displaystyle\int x\sin(x^2+1)\,dx = \left/ \begin{array}{l} t = x^2+1 \\ dt = 2x\,dx \\ \frac{dt}{2} = x\,dx \end{array} \right/ =$

$\displaystyle\int \frac{\sin t}{2}\,dt = -\frac{\cos t}{2} + C = -\frac{\cos(x^2+1)}{2} + C$

b. $\displaystyle\int \underset{\downarrow}{x}\,\underset{\uparrow}{e^{3x}}\,dx \underset{p.i}{=} \frac{e^{3x}}{3}x - \int \frac{e^{3x}}{3}\cdot 1\,dx =$

$\displaystyle\frac{e^{3x}}{3}x - \frac{e^{3x}}{9} + C = \frac{e^{3x}}{9}(3x-1) + C$

c. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1}}{x}\,dx = \left/ \begin{array}{l} t = \sqrt{x+1} \\ x = t^2-1 \\ dx = 2t\,dt \end{array} \right/ =$

$\displaystyle\int \frac{t}{t^2-1}2t\,dt = 2\int \frac{t^2+1-1}{t^2-1}\,dt \underset{\text{Polynomdiv.}}{=}$

$\displaystyle= 2\int\left(1 + \frac{1}{(t+1)(t-1)}\right)dt \underset{\text{PBU}}{=} 2\int\left(1 + \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t-1}\right)dt$

HP $A = -\frac{1}{2}$ $B = \frac{1}{2}$

$\displaystyle= 2\int\left(1 + \frac{\frac{1}{2}}{t-1} - \frac{\frac{1}{2}}{t+1}\right)dt =$

$2t + \ln|t-1| - \ln|t+1| + C =$

$\displaystyle= 2\sqrt{x+1} + \ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right| + C$

---

2. $y'(x) + \frac{1}{x}y(x) = x\sin x\,,\ x>0$

$\left/ \begin{array}{l} i.f = e^{G(x)} \quad \text{där } g(x) = \frac{1}{x} \\ G(x) = \ln x \quad i.f = e^{\ln x} = x \\ \text{mult. med i.f. ger} \end{array} \right/$

$\iff xy' + y = x^2\sin x$

$\iff (yx)' = x^2\sin x$

$\displaystyle yx = \int \underset{\downarrow}{x^2}\,\underset{\uparrow}{\sin x}\,dx \underset{p.i}{=} -x^2\cos x + \int \underset{\downarrow}{2x}\,\underset{\uparrow}{\cos x}\,dx$

$\displaystyle\underset{\text{p.i igen}}{=} -x^2\cos x + 2x\sin x - \int 2\sin x\,dx =$

$-x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C$

$$\Longleftrightarrow \quad y = -x\cos x + 2\sin x + \frac{2\cos x}{x} + \frac{C}{x}$$

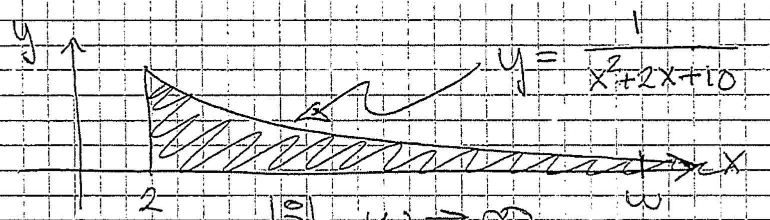
$y(\pi) = \pi$ ger

$$\pi = \pi + 0 - \frac{2}{\pi} + \frac{C}{\pi}$$

ger $C = 2$.

Svar: $y = -x\cos x + 2\sin x + \frac{2\cos x}{x} + \frac{2}{x}$

3.



låt $\omega \to \infty$.

$$\int_2^\omega \frac{1}{x^2+2x+10}\,dx = \int_2^\omega \frac{1}{(x+1)^2+9}\,dx =$$

$$\frac{1}{9}\int_2^\omega \frac{1}{\left(\frac{x+1}{3}\right)^2+1}\,dx = \frac{1}{9}\left[\frac{\arctan\left(\frac{x+1}{3}\right)}{\frac{1}{3}}\right]_2^\omega =$$

$$\frac{1}{3}\Big(\underbrace{\arctan\left(\tfrac{\omega+1}{3}\right)}_{\to \pi/2 \text{ då } \omega\to\infty} - \underbrace{\arctan 1}_{=\pi/4}\Big) \to \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$$

då $\omega \to \infty$.

Svar: Arean $= \frac{\pi}{12}$ a.e.

4. $y'' - 5y' + 6y = 4xe^x$

I. Sök y_h till $y'' - 5y' + 6y = 0$

K.E. $r^2 - 5r + 6 = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} r_1 = 2 \\ r_2 = 3 \end{cases}$

$$y_h = Ce^{2x} + De^{3x}$$

II. Sök y_p till $y'' - 5y' + 6y = 4xe^x$

Sub. $y = ze^x$, $z = z(x)$.

$$y' = z'e^x + ze^x = (z'+z)e^x$$

$$y'' = \ldots = (z'' + 2z' + z)e^x$$

insättning och förkortning av e^x ger

$$z'' + 2z' + z - 5(z'+z) + 6z = 4x$$

$$z'' - 3z' + 2z = 4x$$

Ansats: $z_p = ax + b$, $z_p' = a$, $z_p'' = 0$

ger $0 - 3a + 2(ax+b) = 4x$

koeff framför x: $2a = 4$
konstantterm: $2b - 3a = 0$ $\Longleftrightarrow$ $a = 2$, $b = 3$

$z_p = 2x + 3$, $y_p = (2x+3)e^x$

forts nr 4. $y = y_h + y_p$

$$y = Ce^{2x} + De^{3x} + (2x+3)e^{x}$$

$$y' = 2Ce^{2x} + 3De^{3x} + 2e^{x} + (2x+3)e^{x}$$

till sist. $y(0) = 1$, $y'(0) = 4$ ger

$$\begin{cases} C + D + 3 = 1 \\ 2C + 3D + 2 + 3 = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} C = -5 \\ D = 3 \end{cases}$$

Svar: $y = -5e^{2x} + 3e^{3x} + (2x+3)e^{x}$

---

5 a. $\dfrac{\sin 2x - \ln(1+4x) + 2x}{e^{4x^2} - 1} =$ / Maclaurin utv.

$\sin t = t - \dfrac{t^3}{3!} + \ldots$ $\quad t = 2x$

samt $e^t = 1 + t + \dfrac{t^2}{2!} \ldots$ $\quad t = 4x^2$

$\ln(1+t) = t - \dfrac{t^2}{2} + \ldots$ $\quad t = 4x$ ger

$$= \frac{2x + \mathcal{O}(x^3) - \left(4x - \frac{(4x)^2}{2} + \mathcal{O}(x^3)\right) + 2x}{1 + 4x^2 + \mathcal{O}(x^4) - 1} =$$

$$\frac{8x^2 + \mathcal{O}(x^3)}{4x^2 + \mathcal{O}(x^4)} = \frac{\cancel{x^2}(8 + \mathcal{O}(x))}{\cancel{x^2}(4 + \mathcal{O}(x^2))} =$$

$$\frac{8 + \underset{\to 0}{\mathcal{O}(x)}}{4 + \underset{\to 0}{\mathcal{O}(x^2)}} \longrightarrow \frac{8}{4} = 2 \quad \text{då } x \to 0$$

Svar: Gr.v $= 2$.

---

5 b. $\lim\limits_{x \to \infty} x^2\left(2\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + 1 - \left(1 + \frac{4}{x}\right)^{1/2}\right) =$

/ maclaurin

$\ln(1+t) = t - \dfrac{t^2}{2} + \mathcal{O}(t^3)$ $\qquad t = \dfrac{1}{x} \longrightarrow 0$ då $x \to \infty$

$(1+t)^{\alpha} = 1 + \dfrac{1}{2}t + \dfrac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)}{2!}t^2 + \mathcal{O}(t^3)$

$\alpha = 1/2$ $\qquad t = \dfrac{4}{x} \longrightarrow 0$ då $x \to \infty$

$$= \lim_{x \to \infty} x^2\left(2\left(\frac{1}{x} - \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) + 1 - \left(1 + \frac{1}{2}\frac{4}{x} - \frac{1}{8}\left(\frac{4}{x}\right)^2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)\right)$$

$$= \lim_{x \to \infty} \left((2 - 1) + \underset{\to 0}{\mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right)}\right) = 1$$

Svar: Gr.v $= 1$.

5 c. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\cos(2(x-3))-1}{((x-3)^2+1)^{1/3}-1} =$

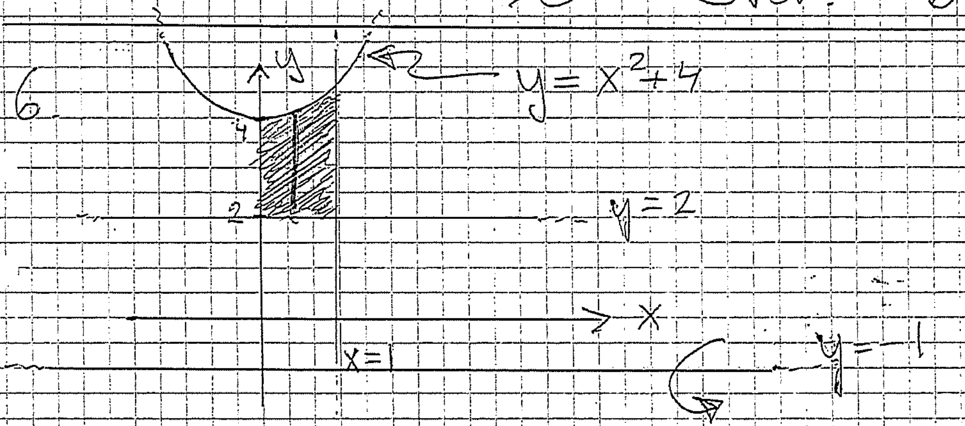
$\left/ \begin{matrix} t = x-3 \\ x\to 3 \Rightarrow t\to 0 \end{matrix} \right/ = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\cos 2t - 1}{(1+t^2)^{1/3}-1} =$

$\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{1-\frac{(2t)^2}{2}+O(t^4)-1}{1+\frac{1}{3}t^2+O(t^4)-1} =$

$\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{-2+\overbrace{O(t^2)}^{\to 0}}{\frac{1}{3}+\underbrace{O(t^2)}_{\to 0}} = -6$

Svar: -6

6.



$V = \displaystyle\int_0^1 \pi(y+1)^2\,dx - \int_0^1 \pi\cdot 3^2\,dx =$

Skivformeln $\underbrace{}_{\text{Hålet i mitten}}$

forts 6.

$V = \pi\displaystyle\int_0^1 (x^2+5)^2\,dx - 9\pi =$

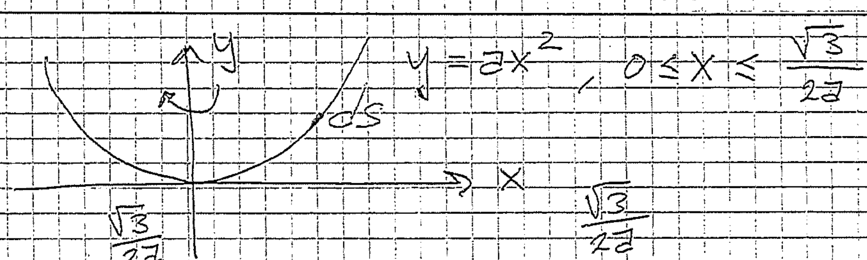
$\pi\displaystyle\int_0^1 (x^4+10x^2+25)\,dx - 9\pi =$

$\pi\left[\dfrac{x^5}{5}+\dfrac{10x^3}{3}+25x\right]_0^1 - 9\pi =$

$\pi\left(\dfrac{1}{5}+\dfrac{10}{3}+25\right) - 9\pi = 16\pi + \dfrac{53\pi}{15}$

Svar: $\dfrac{293\pi}{15}$ v.e.

7. $y = ax^2, \quad 0 \le x \le \dfrac{\sqrt{3}}{2a}$



$A = \displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2a}} 2\pi x\,ds = 2\pi\int_0 x\sqrt{1+(y')^2}\,dx =$

$x = \text{radien}$

$= 2\pi\displaystyle\int_0 x\sqrt{1+(2ax)^2}\,dx =$

forts. nr 7.

$$A = 2\pi \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2a}} x\sqrt{1+4a^2x^2}\,dx =$$

$$2\pi \left[\frac{(1+4a^2x^2)^{3/2}}{\frac{3}{2}\cdot 8a^2} \right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2a}} =$$

$$= \frac{\pi}{6a^2}\left(4^{3/2} - 1\right) = \frac{7\pi}{6a^2} = 42\pi$$

givet.

$a = 1/6$ duger.

Svar: $a = 1/6$.