Linköpings universitet
Magnus Berggren, MAI

Tentamen i Analys i en variabel del 1, utbildningskod TAIU10, modul TEN1. 2020-08-17, kl 8.00 – 13.00

Penna,radergummi,linjal,passare och gradskiva får användas. Formelsamlingar och andra hjälpmedel är ej tillåtna. Lösningarna skall vara fullständiga,välmotiverade,ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Uppgifterna bedöms med 0 – 3 poäng. För betyg n (n = 3, 4 eller 5) krävs minst $4(n-1)$ poäng. Godkänd dugga 1 och dugga 2 ger vardera 1 p. Observera att bonus enbart gäller för betyget 3. Skriv på omslaget hur många bonuspoäng (B=0,B=1 eller B=2) du har.

---

1) Rita grafen till funktionen $f(x) = (x^3 - 2)e^{3x}$. Ange lokala extrempunkter, största och minsta värde samt ev. asymptoter.

2)
   a. Lös ekvationen $\ln(x+2) + \ln(x-3) = \ln(x+9)$. (2p)

   b. Visa att man kan bestämma konstanten a så att polynomet
   $$p(x) = x^4 + ax + 4$$
   är delbart med $x^2 - 2x + 2$. Bestäm därefter alla nollställen till $p(x)$ för detta värde på a. (1p)

3) Avgör om följande gränsvärden existerar och bestäm i så fall deras värden

a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{x^2-5x+4}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} (\ln\sqrt{4x^2+x} - \ln x)$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x)}{\sin 10x}$.

4) En låda utan lock, med kvadratisk bottenyta, ska ha begränsningsytan 27 dm^2. Bestäm lådans maximala volym.

5) Hur många rötter har ekvationen $2x + 3\ln x = 10 \arctan x$ för $x > 0$?

6)
   a. Antag att $f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x}$ för $x \neq 0$. Undersök om man kan definiera $f(0)$ så att f blir kontinuerlig i $x = 0$. (1p)

   b. Antag att $f(x) = x^2 \arctan\frac{1}{x} + 2x$ för $x \neq 0$ och att $f(0) = 0$. Undersök om $f'(0)$ existerar. (2p)

7) Genom en punkt (x, y) på kurvan $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x > 0$ dras tangenten och normalen till kurvan. Dessa begränsar tillsammans med x-axeln en triangel med arean $A(x)$. Bestäm största och minsta värde av $A(x)$ (om dessa existerar).

TAIU10

del 1. Lösningar. 2020-08-17.

1. $f(x) = (x^3-2)e^{3x}$, $x \in \mathbb{R}$.

$f'(x) = 3x^2 e^{3x} + (x^3-2)e^{3x}\cdot 3 =$

$= 3e^{3x}(x^2+x^3-2) = 3e^{3x}(x-1)(x^2+2x+2) =$ kvadratkomp.

nollställe $x=1$
ingående faktor $(x-1)$

$= 3\underbrace{e^{3x}}_{>0}(x-1)\underbrace{((x+1)^2+1)}_{>0}$ $f'=0 \Leftrightarrow x=1$.

x		1	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

$f(1) = (1^3-2)e^{3\cdot 1} = -e^3$

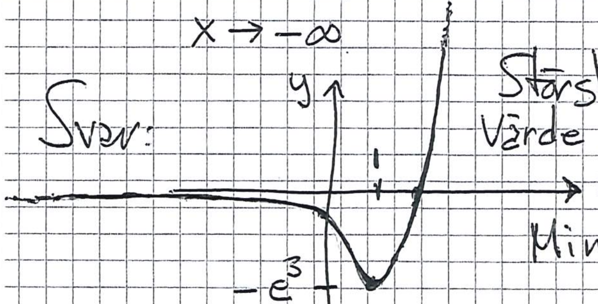
skärningen med x-axeln:
$f(0) = -2$
$f(\sqrt[3]{2}) = 0$

$\lim_{x\to\infty} (x^3-2)e^{3x} = \infty$

$\lim_{x\to-\infty} (x^3-2)e^{3x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3-2}{e^{-3x}} = 0$

jfr standardgr. $\frac{x^\alpha}{e^x} \to 0$ då $x\to\infty$ $(\alpha>0)$.

Svar:



Största värde saknas.

Minsta värde är $-e^3$

$y=0$ asymtot då $x \to -\infty$

2 a. Lös $\ln(x+2) + \ln(x-3) = \ln(x+9)$

L: Krav: $x>3$. log.lag nr (1) ger

$\ln(x+2)(x-3) = \ln(x+9)$

$(x+2)(x-3) = x+9$ // $\ln x$ strängt växande //.

$x^2-3x+2x-6 = x+9$

$x^2-x-6 = x+9$

$x^2-2x-15 = 0$

$x = 1 \pm\sqrt{1+15} = 1\pm 4 = \begin{cases} 5 \\ \cancel{-3} \text{ falsk} \end{cases}$

Prövning: $x=5$ ger

$V.L = \ln(5+2) + \ln(5-3) = \ln 7 + \ln 2 = \ln 14$

$H.L = \ln(5+9) = \ln 14$.

$x=5$ stämmer.

Svar: $x=5$

2b. $x^2-2x+2=0$

$x = 1 \pm i$

$1+i$ är nollställe till $p(x)$.

$p(1+i) = (1+i)^4 + a(1+i) + 4 = 0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2}\, e^{i\pi/4}\right)^4 + a(1+i) + 4 = 0$

$\cancel{4e^{i\pi}} + a(1+i) \cancel{+4} = 0$

$a = 0$.

$p(x) = x^4 + 4 = (x^2-2x+2)(x^2+2x+2)$

p:s nollställen blir

$$\begin{cases} x_1 = 1+i \\ x_2 = 1-i \\ x_3 = -1+i \\ x_4 = -1-i \end{cases}$$

3a. $\dfrac{x^2+x-2}{x^2-5x+4} = \dfrac{\cancel{(x-1)}(x+2)}{\cancel{(x-1)}(x-4)} \to \dfrac{3}{-3} = \underline{-1}$

då $x \to 1$.

3b. $\ln \dfrac{\sqrt{4x^2+x}}{x} = \ln \dfrac{\cancel{x}\sqrt{4+\frac{1}{x}}}{\cancel{x}} \to \ln\sqrt{4} = \underline{\underline{\ln 2}}$

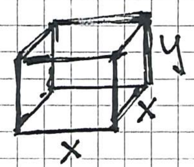
då $x \to \infty$

3c. $\underbrace{\dfrac{\ln(1+2x)}{2x}}_{\to 1} \cdot \dfrac{1}{\underbrace{\frac{\sin 10x}{10x}}_{\to 1}} \cdot \dfrac{2}{10} \to \dfrac{1}{5}$ då $x \to 0$

då $x \to 0$.

enligt standard-gränsvärde.

4.



$4xy + x^2 = 27$

$y = \dfrac{27-x^2}{4x}$

$V = x^2 y = x^2\left(\dfrac{27-x^2}{4x}\right) = \dfrac{27}{4}x - \dfrac{x^3}{4}, \quad x>0$

Sök V_{max}.

$V' = \dfrac{27}{4} - \dfrac{3x^2}{4} = 0 \underset{(x>0)}{\Leftrightarrow} x = 3$ ger V_{max}.

x	0		3	
V'		+	0	−
V		↗		↘

$V_{max} = V(3) = 3\left(\dfrac{27-9}{4}\right) dm^3$

Svar: $V_{max} = \dfrac{27}{2}\ \underline{\underline{dm^3}}$

5. Bilda $f(x) = 2x + 3\ln x - 10\arctan x$

$$f'(x) = 2 + \frac{3}{x} - \frac{10}{1+x^2} = \frac{2x(1+x^2)+3(1+x^2)-10x}{x(1+x^2)} =$$

$$\frac{2x+2x^3+3+3x^2-10x}{x(1+x^2)} = \frac{2x^3+3x^2-8x+3}{x(1+x^2)} =$$

$$\frac{(x-1)(2x^2+5x-3)}{x(1+x^2)} = \frac{(x-1)(x+3)(2x-1)}{x(1+x^2)}$$

x	0		1/2		1	
$f'(x)$		+	0	−	0	+
$f(x)$		↗		↘		↗

$$\left(f(1) = 2 - \underbrace{3\ln 1}_{=0} - 10\underbrace{\arctan 1}_{=\pi/4} = 2 - \frac{5\pi}{2} < 0 \right)$$

$$f(1/2) = 1 + \underbrace{3\ln\tfrac{1}{2}}_{=-3\ln 2 < -1} - 10\underbrace{\arctan\tfrac{1}{2}}_{>0} < 0$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}(\underbrace{2x}_{\to\infty} + \underbrace{3\ln x}_{\to\infty} - 10\underbrace{\arctan x}_{\to\pi/2}) = \infty.$$

+ f kont. således skär f x-axeln precis en gång.

dvs. $2x + 3\ln x = 10\arctan x$ har exakt en rot. $(x>0)$ reell.

6.a. f kont. i $x=0 \iff \lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{x} = \lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}}_{\to 1}\underbrace{x}_{\to 0} = 0$$

jämför $\boxed{\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t} = 1}$

Svar: Ja. $f(0)=0$

6 b.

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^2\arctan\frac{1}{x} + 2x - 0}{x-0} =$$

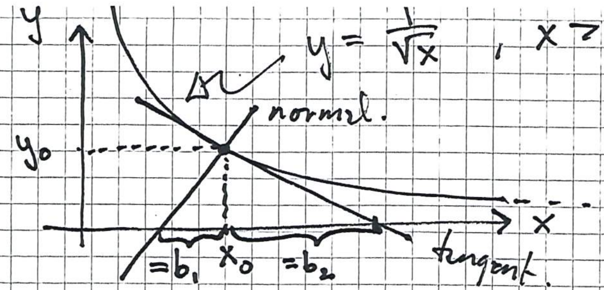
$$= \lim_{x\to 0}\underbrace{x}_{\to 0}\underbrace{\arctan\frac{1}{x}}_{\text{begränsad.}} + 2 = 0 + 2 = 2$$

$-\pi/2 < \arctan\frac{1}{x} < \pi/2$ för alla $x \neq 0$. $x \in \mathbb{R}$.

Svar: $f'(0)$ existerar och $f'(0) = 2$

---

7. $y = \frac{1}{\sqrt{x}} \;,\; x > 0 \;.$



$y_0 = \frac{1}{\sqrt{x_0}}$

$y' = \frac{-1}{2x\sqrt{x}} \qquad y'(x_0) = \frac{-1}{2x_0\sqrt{x_0}}$ tangentens lutning.

$$\frac{y_0}{b_2} = \frac{1}{2x_0\sqrt{x_0}} \iff b_2 = 2x_0$$

Normalens lutning $= \frac{-1}{y'(x_0)} = 2x_0\sqrt{x_0}$

$$\frac{y_0}{b_1} = 2x_0\sqrt{x_0} \iff b_1 = \frac{1}{2x_0^2}$$

$$A(x_0) = \frac{\left(2x_0 + \frac{1}{2x_0^2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{x_0}}}{2} = \sqrt{x_0} + \frac{1}{4x_0^{5/2}}$$

$$A'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}} - \frac{5}{8}\frac{1}{x_0^{7/2}} = 0$$

$$x_0^3 = \frac{5}{4} \underset{x_0 > 0}{\iff} x_0 = \sqrt[3]{\frac{5}{4}} \text{ ger } A_{min}.$$

A_{max} saknas.

x_0		$\sqrt[3]{\frac{5}{4}}$		
A'	$-$	0	$+$	
A	$\searrow$		$\nearrow$	$\to \infty$

$$A\left(\sqrt[3]{\frac{5}{4}}\right) = \frac{6}{5}\sqrt[6]{\frac{5}{4}}$$